Math. I 131^w (1.
Euler
149

Bury, Comp. d. hoh. Math.
Dsl., Ausführliches Lehrbuch d. h. Mathematik 3 Bd.

E
Math. I 131^u

ooo 60 34/2 (ungl)

<36622226610014 S

<36622226610014

Bayer. Staatsbibliothek

Leonhard Eulers
vollständige Anleitnng
zur
niedern und höhern Algebra
nach der französischen Ausgabe des Herrn de la Grange
mit Anmerkungen und Zusätzen herausgegeben

von
Johann Philipp Grüson,
Professor der Mathematik am Königl. Kadettencorps.

Erster Theil.

Mit Churfürstl. Sächs. Privilegio.

Berlin, bei G. C. Nauk, 1796.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Sr. Excellenz
Dem
Hochwohlgebohrenen Herrn,
Herrn Levin von Geusau,
Königl. Preuß. General-Lieutenant, und General-Quartiermeister von der Armee, wie auch General-Inspekteur sämmtlicher Festungen u. s. w Ritter des großen rothen Adlerordens u. s. w.

Dem
Hochwohlgebohrenen Herrn,
Herrn Friedr. Wilh. von Rüchel,
Königl. Preuß. General-Major, Chef eines Regiments zu Fuß u. s. w. Ritter des großen rothen Adlerordens, des Ordens der Verdienste und des hessischen Ordens pour la vertû Militaire, Erb- Lehns- und Gerichtsherrn mehrerer Güter.

Dem
Hochwohlgebohrenen Herrn,
Herrn Carl August von Beulwitz,
Chef der Militair-Akademie und des Adelichen Kadetten-Korps.

Dem
Hochwohlgebohrenen Herrn,
Herrn Joach. G. von Wulffen,
Obersten und Commandeur der Militair-Akademie und des Adelichen Kadetten-Korps.

Dem

Hochwohlgebohrenen Herrn

Herrn Andreas von Hartmann,

Königl. Preuß. Major des Ingenieurkorps, Assessor beym vierten Departement Eines Königl. Ober-Krieges-Kollegii u. s. w.

und dem

Hochwohlgebohrenen Herrn,

Herrn Friedr. von Lingelsheim,

Königl. Preuß. Major des Adelichen Kadetten-Korps u. s. w.

Ehrfurchtsvoll gewidmet

von

Grüson.

Vorbericht.

Der verewigte Euler wußte überall Gründlichkeit und Deutlichkeit so glücklich zu vereinigen, daß seine Absicht, ein Lehrbuch der Algebra abzufassen, aus welchem jeder Liebhaber der Mathematik ohne Beyhülfe eines Lehrers, die Buchstabenrechenkunst und gemeine Algebra gründlich zu erlernen im Stande wäre, nicht verfehlt werden konnte; auch genoß er das Vergnügen, sich davon durch Erfahrung zu überzeugen. Er war nemlich gerade zu der Zeit, als er die Algebra ausarbeitete, seines Gesichts völlig beraubt, und daher genöthiget, sie seinem Bedienten in die Feder zu dictiren. Dieser junge Mensch, von Profession ein Schneider, war von sehr mittelmäßigen Talenten, und verstand, als Euler sich seiner zu diesem Zweck bediente, von der Mathematik nichts weiter, als daß er mechanisch fertig rechnen konnte, und doch faßte er nicht nur, ohne weitere Erklärung, alles dasjenige, was ihm dictirt wurde, sondern wurde auch dadurch gar bald in den Stand gesetzt, die in der Folge vorkommenden schweren Buchstabenrechnungen ganz allein auszuführen, und alle ihm vorgelegten algebraischen Aufgaben mit vieler Fertigkeit aufzulösen.

Mit

Mit Recht rühmt unter andern Vorzügen, welche dieses vortrefliche Lehrbuch hat, der Petersburgische Herausgeber den Vortrag der Lehre von den Logarithmen, ingleichen die im zweyten Theile für die Auflösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen gegebenen Methoden, und die ausführliche Abhandlung über die diophantischen Aufgaben, welche den letzten Abschnitt des zweyten Theils ausmacht, und worin alle zur Auflösung dieser Aufgaben erforderlichen Kunstgriffe sehr sorgfältig erklärt werden.

Von diesem Werke ist eigentlich nur Eine deutsche Ausgabe vorhanden, die 1770 zu St. Petersburg erschien; denn die zu Lund herausgekommene und ebenfalls unter den Druckort St. Petersburg erschienene Ausgabe ist ein bloßer Nachdruck. — Uebersetzt ist dies Werk ins Russische schon 2 Jahre vorher, und ins Französische 1774 von dem noch jetzt hier in Berlin lebenden Herrn Prof. Bernoulli. Die letztere Uebersetzung ist zu Lion und Paris erschienen.

Ein Auszug von Eulers Algebra lieferte Herr Prof Ebert 1789, Frankf. am Mayn. Die deutschen Ausgaben dieser Algebra sind schon seit mehrern Jahren völlig vergriffen, und noch hat kein neueres Werk diesen Mangel ersetzet. Dies veranlaßte mich einer neuen vollständigen Ausgabe zu unterziehen. Ich habe mich bemüht, den oft nur zu wortreichen und durch weitläuftigen Periodenbau schleppend gewordenen

wordenen Vortrag Eulers, in ein gefälligeres, den Geschmack weniger beleidigendes Gewand umzuklei- den. Die Deutlichkeit hat, wie ich mir schmeichele, hierdurch nicht wenig gewonnen; so wie durch eine sorgfältige Ausmerzung der vielen eingeschlichenen Druckfehler nicht geringe Schwierigkeiten des Selbstunterrichts gehoben worden sind. Die Paragraphenfolge habe ich beybehalten und meine Anmerkungen, die theils die Verdeutlichung des Vorgetragenen, theils die Verbesserung der hie und da eingeschlichenen Fehler beabsichtigen, sind in kleinerer Schrift jedem Paragraph, wo ich es nöthig hielt, beygefügt worden.

Man wird mir es hoffentlich zutrauen, daß mich nicht Tadelsucht oder ein anderer unedler Bewegungsgrund verleiteten hin und wieder auf Uebereilungen eines Eulers den Leser aufmerksam zu machen. In der Gelehrten-Republik gilt keine Authorität, und das αυτος εφα darf der Mathematiker gerade am wenigsten respectiren, da die mathematischen Wahrheiten einer Demonstration fähig sind, deren sich keine andere, selbst nicht die erhabene Philosophie, die Gesetzgeberin der Menschheit, rühmen kann. — Ich glaube also nicht, hierdurch die dem unsterblichen Euler schuldigen Achtung, die keiner lebhafter fühlen kann, als ich, verletzt zu haben.

Außer den beyden Theilen, in welchen das Eulersche Werk selbst geliefert werden soll, wird noch ein

ein dritter Theil folgen, der nebst den Zusätzen des Herrn de la Grange zur unbestimmten Analysis, welche sich bey der oben genannten französischen Ausgabe befinden, eine deutliche und faßliche Darstellung des Nothwendigsten aus der Differential- und Integralrechnung enthalten wird. — Diese drey Theile zusammen genommen, werden daher ein sehr brauchbares Lehrbuch sowohl der Analysis endlicher als unendlicher Größen abgeben können.

Der Herr Verleger hat übrigens keine Kosten gespart, einen korrecten und deutlichen Druck auf gutem weißen Papier zu liefern, und um das Werk gemeinnütziger zu machen, versprochen, der vielen Zusätze ungeachtet, es so wohlfeil, als die alte Ausgabe zu liefern.

Die beyden übrigen Theile werden zur Michaelismesse nachfolgen.

Grüson.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Inhalt des ersten Theils.

Erster Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungsarten mit einfachen Größen.

I. Capitel. Von der Algebra überhaupt. Seite 2—6
II. Capitel. Von der Addition und Subtraction einfacher Größen. 7—15
III. Capitel. Von der Multiplication mit einfachen Größen. 15—20
IV. Capitel. Von der Natur der ganzen Zahlen in Absicht auf ihre Factoren und den sogenannten Primzahlen. 21—25
V. Capitel. Von der Division mit einfachen Größen. 25—30
VI. Capitel. Von den Eigenschaften der ganzen Zahlen in Ansehung ihrer Theiler. 31—36
VII. Capitel. Von den Brüchen überhaupt. 36—44
VIII. Capitel. Von den Eigenschaften der Brüche. 45—49
IX. Capitel. Von der Addition und Subtraction der Brüche. 49—53
X. Capitel. Von der Multiplication und Division der Brüche. 53—59
XI. Capitel. Von den Quadratzahlen. 59—63

XII. Ca-

XII. Capitel. Von den Quadratwurzeln und den daher entspringenden Irrationalzahlen. Seite 63—70
XIII. Capitel. Von den aus eben dieser Quelle entspringenden unmöglichen oder imaginären Zahlen. 70—76
XIV. Capitel. Von den Cubiczahlen. 77—79
XV. Capitel. Von den Cubicwurzeln und den daher entspringenden Irrationalzahlen. 79—83
XVI. Capitel. Von den Dignitäten oder Potenzen überhaupt. 83—90
XVII. Capitel. Von den Rechnungsarten mit Potenzen. 90—93
XVIII. Capitel. Von den Wurzeln in Absicht auf alle Potenzen. 94—96
XIX. Capitel. Von der Bezeichnung der Irrationalzahlen durch gebrochene Exponenten. 97—101
XX. Capitel. Von den verschiedenen Rechnungsarten und ihrer Verbindung überhaupt. 101—107
XXI. Capitel. Von den Logarithmen überhaupt. 107—112
XXII. Capitel. Von den gebräuchlichen logarithmischen Tabellen. 113—117
XXIII. Capitel. Von der Art die Logarithmen darzustellen. 117—124

Zweyter Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungsarten mit zusammengesetzten Größen.

I. Capitel. Von der Addition zusammengesetzter Größen. Seite 127—130

Inhalt.

II. Capitel. Von der Subtraction zusammengesetzter Größen. Seite 130 — 133

II. Capitel. Von der Multiplication zusammengesetzter Größen. 133 — 139

IV. Capitel. Von der Division zusammengesetzter Größen. 140 — 145

V. Capitel. Von der Auflösung der Brüche in unendliche Reihen. 145 — 152

VI. Capitel. Von den Quadraten der zusammengesetzten Größen. 162 — 167

VII. Capitel. Von der Ausziehung der Quadratwurzel in zusammengesetzten Größen. 167 — 175

VIII. Capitel. Von der Rechnung mit Irrationalzahlen. 176 — 181

IX. Capitel. Von den Cubiczahlen zusammengesetzter Größen und von der Ausziehung der Cubicwurzeln. 181 — 185

X. Capitel. Von den höhern Potenzen zusammengesetzter Größen. 186 — 193

XI. Capitel. Von der Versetzung der Buchstaben, als worauf der Beweis der vorigen Regel, wie eine jede Potenz von einer zusammengesetzten Größe leicht gefunden werden soll, beruhet. Ferner eine kurze Darstellung von Permutationen, Combinationen (mit und ohne Wiederholung) und Variationen nach Hindenburg. 194 — 206

XII. Capitel. Von der Entwickelung der Irrationalpotenzen durch unendliche Reihen. 206 — 215

XIII. Capitel. Von der Entwickelung der negativen Potenzen durch unendliche Reihen. 215 — 221

Drit-

Dritter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

I. Capitel. Von den arithmetischen Verhältnissen, oder von dem Unterschiede zwischen zwey Zahlen. Seite 225—229

II. Capitel. Von den arithmetischen Proportionen. 229—233

III. Von den arithmetischen Progressionen. 233—239

IV. Capitel. Von der Summirung der arithmetischen Progressionen. 239—245

V. Capitel. Von den polygonal= oder vieleckigen Zahlen. 245—254

VI. Capitel. Von den geometrischen Verhältnissen. 254—258

VII. Capitel. Von dem größten gemeinschaftlichen Theiler zweyer gegebenen Zahlen. 258—263

VIII. Capitel. Von den geometrischen Proportionen. 263—270

IX. Capitel. Anmerkungen über den Nutzen der Proportionen. 270—276

X. Capitel. Von den zusammengesetzten Verhältnissen. 276—284

XI. Capitel. Von den geometrischen Progressionen. 284—293

XII. Capitel. Von den unendlichen Decimalbrüchen. 293—301

XIII. Capitel. Von der Intressenrechnung. 301—312

Des

Des Ersten Theils Erster Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungsarten mit einfachen Größen.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Des

Ersten Theils

Erster Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungsarten mit einfachen Größen.

I. Capitel.

Von der Algebra überhaupt.

§. 1.

Alles dasjenige wird eine Größe genannt, welches einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist, oder wozu sich noch etwas hinzusetzen oder davon wegnehmen läßt.

Daher ist eine Summe Geldes eine Größe, weil sich etwas dazu setzen und hinweg nehmen läßt.

Imgleichen ist auch ein Gewicht eine Größe und dergleichen mehr.

§. 2.

Es giebt also sehr viel verschiedene Arten von Größen, welche sich nicht wohl herzählen lassen; und daher entstehen die verschiedenen Theile der

Mathematik, von denen sich jeder mit einer besondern Art von Größen beschäftiget, indem die Mathematik überhaupt nichts anders ist, als eine Wissenschaft der Größen, welche Mittel ausfindig macht, wie man dieselben ausmessen soll.

Anmerkung. Ueber das Wesen der Mathematik findet man sehr viel Lehrreiches in folgenden Schriften. Michelsens, Gedanken über den gegenwärtigen Zustand der Mathematik — Berlin 1789, dessen Beyträge zur Mathematik. Erster Band. Berlin 1790. und in dessen Elemente des Euclides. — Berlin 1791.

§. 3.

Es läßt sich aber eine Größe nicht bestimmen oder ausmessen, wenn man nicht eine Größe derselben Art als bekannt annimmt, und das Verhältniß anzeigt, worinn eine jede Größe, von eben der Art, gegen dieselbe steht.

Also, wenn die Größe einer Summe Geldes bestimmt werden soll, so wird ein gewisses Stück Geld, z. B. ein Gulden, ein Rubel, ein Thaler, oder ein Dukaten und dergleichen, als bekannt angenommen, und angezeigt, wie viel dergleichen Stücke in jener Summe enthalten sind.

Eben so, wenn die Größe eines Gewichts bestimmt werden soll, so wird ein gewisses Gewicht, z. B. ein Pfund, ein Centner, oder ein Loth und dergleichen, als bekannt angenommen, und angezeigt, wie viel derselben in dem vorigen Gewicht enthalten sind.

Soll aber eine Länge oder eine Weite ausgemessen werden, so pfleget man sich dazu einer gewissen bekannten Länge, welche ein Fuß genannt wird, zu bedienen.

Anmer-

Anmerkung. Nicht bloß der Fuß, sondern auch der Meilen, Ruthen, Ellen u. s. w. bedient man sich zum Ausmessen der Längen, der Astronom gebraucht sogar Erddiameter und Sonnenfernen, zu Ausmessungen am Himmel.

§. 4.

Bey Bestimmungen, oder Ausmessungen der Größen aller Art, kömmt es also darauf an, daß erstlich eine gewisse bekannte Größe von gleicher Art fest gesetzt werde (welche das Maaß, oder die Einheit genannt wird), und also von unserer Willkühr abhängt; hernach, daß man bestimme, in was für einem Verhältnisse die vorgegebene Größe gegen dieses Maaß stehe, welches jederzeit durch Zahlen angezeigt wird, so daß eine Zahl nichts anders ist, als das Verhältniß, worinn eine Größe gegen eine andere, die statt der Einheit angenommen wird, steht.

§. 5.

Hieraus ist klar, daß sich alle Größen durch Zahlen ausdrücken lassen, und also der Grund aller mathematischen Wissenschaften darinn gesetzt werden muß, daß man die Lehre von den Zahlen, und alle Rechnungsarten, die dabey vorkommen können, genau in Erwägung ziehe, und vollständig abhandle. Dieser Grundtheil der Mathematik wird die Analytik oder Algebra genannt.

Anmerk. Mehrere Mathematikverständige unterscheiden mit Recht Analytik oder Analysis von Algebra, denn diese ist eigentlich nur ein Theil von jener. Weiter hin wird sich dieser Unterschied genauer angeben lassen.

§. 6.

In der Analytik werden also bloß Zahlen betrachtet, wodurch die Größen angezeigt werden, ohne sich um die besondere Art der Größen zu

bekümmern, welches in den übrigen Theilen der Mathematik geschieht.

§. 7.

Von den Zahlen insbesondere handelt die gemeine Arithmetik oder Rechenkunst, (arithmetica vulgaris). Diese erstreckt sich aber nur auf gewisse Rechnungsarten, welche im gemeinen Leben öfters vorkommen; hingegen begreift die Analytik auf eine allgemeine Art alles dasjenige in sich, was bey den Zahlen und deren Berechnung auch immer vorfallen mag.

1. Zusatz. Außer den gewöhnlichen arithmetischen Ziffern bedient man sich in der Algebra noch verschiedener anderer Zeichen, die zu den im gemeinen Leben vorkommenden Rechnungen nicht nöthig sind. Um aber das Gedächtniß nicht zu sehr zu beschweren, so hat man bloß zur Bemerkung der verschiedenen Operationen besondere Zeichen erdacht, und zur Bezeichnung der Größen selbst die Buchstaben des lateinischen Alphabets gewählt. Wenn die lateinischen Buchstaben nicht hinreichend sind, so pflegt man sich auch der griechischen, hebraischen und deutschen Buchstaben zu dieser Absicht zu bedienen. Die folgenden Capitel werden darüber alle nöthige Erläuterung geben.

2. Zusatz. Die Verrichtung der gewöhnlichen Rechnungsarten, vermittelst der Buchstaben, wird die Buchstabenrechnung (calculus literalis), oder allgemeine Arithmetik (arithmetica, seu calculus universalis) genannt; sie ist ein sehr wichtiges Hülfsmittel zur Erlernung der Algebra, die wesentlich von ihr unterschieden ist. Letztere bestehet eigentlich in der Wissenschaft, Gleichungen aufzulösen, das heißt, den Werth der unbekannten Größe, die in der Gleichung enthalten ist, zu finden. Durch eine Gleichung aber versteht man nichts anders, als eine Formel, oder ein Ausdruck, worin einerley Größe auf zweyerley Art ausgedrückt wird. Z. B. 24 Groschen und 288 Pfennige zeigen einerley Summe an, denn jedes ist so viel als ein Thaler, also sind 24 Groschen gleich 288 Pfennigen, welches man mathematisch durch das gewöhnliche Zeichen der Gleichheit = folgendergestalt auszudrücken und eine Aequation oder Gleichung zu nennen pflegt.

24 Groschen = 288 Pfennige.

Aber solche Gleichungen aus dem Gegebenen zu finden, ist das eigentliche Geschäft der Analysis.

II. Ca-

II. Capitel.

Von der Addition und Subtraction einfacher Größen.

§. 8.

Wenn zu einer Zahl eine andere hinzugesetzt oder addirt werden soll, so wird solches durch das Zeichen + angedeutet, welches der Zahl vorgesetzt und plus ausgesprochen wird.

Also wird durch 5 + 3 angedeutet, daß zu der Zahl 5 noch 3 addirt werden soll, da man denn weiß, daß 8 heraus kommt: eben so z. B.

12 + 7 ist 19; 25 + 16 ist 41; und 25 + 41 ist 66. u. s. w.

§. 9.

Durch dieses Zeichen (+) pflegen auch mehrere Zahlen verbunden zu werden, als z. B.

7 + 5 + 9, wodurch angezeigt wird, daß zu der Zahl 7 noch 5, und überdies noch 9 addirt werden sollen, welches 21 ausmacht. Hieraus ersieht man, was folgender Ausdruck bedeutet, als:

8 + 5 + 13 + 11 + 1 + 13 + 10,

nemlich die Summe aller dieser Zahlen, welche 61 beträgt.

§. 10.

Wie dieses für sich klar ist, so ist noch zu merken, daß auf eine allgemeine Art die Zahlen durch Buchstaben, als a, b, c, d, u. s. w. angedeutet werden, wenn man also schreibt $a + b$, so bedeutet dieses die Summe der beyden Zahlen, welche durch a und b ausgedrückt werden, dieselben mögen nun so groß oder klein seyn, als sie wollen. Eben so bedeutet $f + m + b + x$ die Summe der Zahlen, welche durch diese Buchstaben ausgedrückt werden.

Wenn man also nur weiß, was für Zahlen durch Buchstaben angedeutet werden, so findet man durch die Rechenkunst die Summe oder den Werth von dergleichen Ausdrücken in jedem andern Fall.

§. 11.

Wenn hingegen von einer Zahl eine andere weggenommen werden soll, oder subtrahirt wird, so wird solches durch das Zeichen (—) angedeutet, welches man minus oder weniger ausspricht, und vor diejenige Zahl setzt, die subtrahirt werden soll.

So bedeutet z. B. der Ausdruck 8 — 5 daß von der Zahl 8 die Zahl 5 soll weggenommen werden, da dann, wie bekannt ist, 3 übrig bleibt. Eben so ist 12 — 7 so viel, als 5, und 20 — 14, so viel als 6, u. s. w.

§. 12.

Es kann auch geschehen, daß von einer Zahl mehr Zahlen zugleich subtrahirt werden sollen.

z. B. 50 — 1 — 3 — 5 — 7 — 9.

Welches also zu verstehen ist: nimmt man zuerst 1 von 50 weg, so bleiben 49; davon 3 weggenommen, bleiben 46; davon 5, bleiben 41; davon 7, bleiben 34; davon die letzten 9 weggenommen, bleiben 25; welches der Werth des vorgegebenen Ausdrucks ist. Aber da die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, insgesammt weggenommen werden sollen, so ist es eben so viel, als wenn man ihre Summe, nemlich 25, auf einmal von 50 abzieht, da dann, wie vorher, 25 übrig bleiben.

§. 13.

Eben so läßt sich auch leicht der Werth solcher Ausdrücke bestimmen, in welchen beyde Zeichen + und — vorkommen; z. B.

12 — 3 — 5 + 2 — 1 ist so viel als 5.

Oder man darf nur die Summe der Zahlen, die + vor sich haben, besonders nehmen, als:

12 + 2 machen 14, und davon die Summe aller Zahlen, die — vor sich haben, welche sind 3, 5, 1, das ist 9 abziehen, da dann, wie vorher, 5 gefunden wird.

§. 14.

Hieraus ist klar, daß es hierbey gar nicht auf die Ordnung der hergesetzten Zahlen ankomme, sondern daß man sie nach Belieben versetzen könne, wenn nur eine jede das ihr vorstehende Zeichen behält. So kann man, anstatt der obigen Formel, setzen:

12 + 2 — 5 — 3 — 1 oder 2 — 1 — 3 — 5 + 12
oder 2 + 12 — 3 — 1 — 5.

Wobey aber zu merken ist, daß im ersten Ausdruck vor der Zahl 12 das Zeichen + vorgesetzt verstanden werden muß. Denn man pflegt dieses Zeichen beym Anfang eines Ausdrucks gemeiniglich wegzulassen.

§. 15.

Wenn nun, um die Sache allgemein zu machen, anstatt der gewöhnlichen Zahlen, Buchstaben gebraucht werden, so begreift man auch leicht die Bedeutung davon. Z. B.

a — b — c + d — e deutet an, daß die durch die Buchstaben a und d ausgedrückte Zahlen zusammen genommen, und davon die übrigen b, c, e, welche das Zeichen — haben, insgesammt weggenommen werden sollen.

§. 16.

Hier kömmt es also hauptsächlich darauf an, was für ein Zeichen eine jede Zahl vor sich stehen hat;

daher pflegt man in der Algebra die Zahlen mit ihren vorstehenden Zeichen als einzelne Größen zu betrachten, und diejenigen, welche das Zeichen + vor sich haben, bejahende oder positive; diejenigen aber, welche das Zeichen — vor sich haben, verneinende oder negative Größen zu nennen.

§. 17.

Dieses läßt sich sehr gut durch die Art erläutern, wie man das Vermögen einer Person anzuzeigen pflegt; da dasjenige, was jemand wirklich besitzt, durch positive Zahlen mit dem Zeichen +, dasjenige aber, was er schuldig ist, durch negative Zahlen mit dem Zeichen — ausgedrückt wird. Also wenn jemand 100 Rubel hat, dabey aber 50 Rubel schuldig ist, so wird sein Vermögen seyn:

100 — 50, oder, welches einerley
+ 100 — 50, das ist 50.

§. 18.

Da nun die negativen Zahlen als Schulden betrachtet werden können, in so fern die positiven Zahlen die wirklichen Besitzungen anzeigen; so kann man sagen, daß die negativen Zahlen weniger sind, als nichts. Wenn jemand z. B. nichts im Vermögen hat, und noch dazu 50 Rubel schuldig ist, so hat er wirklich 50 Rubel weniger als nichts. Denn wenn ihm jemand 50 Rubel schenken sollte, um seine Schulden zu bezahlen, so würde er alsdann erst nichts haben, da er doch itzt mehr hat, als vorher.

§. 19.

Wie nun die positiven Zahlen unstreitig größer als nichts sind, so müssen die negativen Zahlen kleiner als nichts seyn. Die positiven Zahlen aber entste-

entstehen, wenn man erstlich zu 0, oder Nichts, immerfort Eins zusetzt, da dann die Reihe der sogenannten natürlichen Zahlen entspringt, nemlich:

$$0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9, +10,$$

und so fort ohne Ende.

Wird aber diese Reihe rückwärts fortgesetzt, und immer eins mehr weggenommen, so entspringt folgende Reihe der negativen Zahlen.

$$0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10,$$

und so ins unendliche.

§. 20.

Alle diese Zahlen, sowohl positive als negative, führen den bekannten Namen der ganzen Zahlen, welche also entweder größer oder kleiner sind, als nichts. Man nennet sie ganze Zahlen, um sie von den gebrochenen, und von vielerley andern Zahlen, wovon unten gehandelt werden soll, zu unterscheiden. Denn da z. B. 50 um ein Ganzes größer ist als 49, so begreift man leicht, daß zwischen 49 und 50 noch unendlich viel Mittelzahlen statt finden können, welche alle größer als 49, und doch alle kleiner als 50 sind. Man darf sich zu diesem Ende nur 2 Linien vorstellen, wovon die eine 50 Fuß, die andere aber 49 Fuß lang ist, so wird man leicht begreifen, daß man unendlich viele andere Linien ziehen kann, welche alle länger als 49, und doch kürzer als 50 Fuß sind.

§. 21.

Dieser Begriff von den verneinenden oder negativen Größen ist um so sorgfältiger zu bemerken, da er in der ganzen Algebra von der größten Wichtigkeit ist. Hier wird es genug seyn, zum Voraus noch zu bemerken, daß diese Ausdrücke:

+1

$+1-1$, $+2-2$, $+3-3$, $+4-4$, u. s. f. alle so viel sind, als 0, oder Nichts: ferner, daß z. B. $+2-5$ so viel ist als -3; denn wenn einer 2 Rubel hat, und 5 Rubel schuldig ist, so hat er nicht nur nichts, sondern bleibt noch 3 Rubel schuldig: eben so ist,

$7-12$ so viel als -5
$25-40$ so viel als -15.

§. 22.

Eben dieses ist auch zu beobachten, wenn auf eine allgemeine Art anstatt der Zahlen Buchstaben gebraucht werden, da denn immer $+a-a$, so viel ist als 0, oder nichts. Wenn man wissen will, was z. B. $+a-b$ bedeute, so sind zwey Fälle zu erwägen.

1) Wenn a größer ist als b, so subtrahiret man b von a, und der Rest, positiv genommen, ist der gesuchte Werth.

2) Wenn a kleiner ist als b, so subtrahirt man a von b, und der Rest, negativ genommen, oder das Zeichen $-$ vorgesetzt, zeigt den gesuchten Werth an.

1. Zusatz. Die positiven und negativen Größen pflegt man auch überhaupt entgegengesetzte Größen zu nennen, die also in allen denjenigen Fällen statt finden, wo man Größen von einerley Art hat, die unter solchen Bedingungen betrachtet werden können, vermöge welcher eine die andere vermindert. So sind z. B. Vermögen und Schulden, Einnahme und Ausgabe, vorwärts und rückwärts gehende Bewegung, Steigen und Fallen u. s. w. entgegengesetzte Größen, und es hängt bloß von meiner Willkühr ab, welche ich für positiv annehmen will. Ausgabe ist eine verneinende Einnahme, und Einnahme kann als verneinende Ausgabe angesehen werden. Nenne ich den Weg von Berlin nach Magdeburg positiv, so muß ich den Weg von Magdeburg nach Berlin negativ nennen, und umgekehrt, nenne ich den Weg von Magdeburg nach Berlin positiv, so muß ich den Weg von Berlin nach Magdeburg negativ nennen, und so in allen übrigen Fällen.

2. Zusatz. Aus dem bisher gesagten ist klar, daß die Zeichen (+ —) bey entgegengesetzten Größen bloß das Bejahte und Verneinte ausdrücken, welches man sich bey ihnen denkt: sie beziehen sich nur auf die Bedingungen, und gehen die Größe der Sache gar nichts an.

Der Weg nach Norden sey positiv, so ist der Weg nach Süden negativ. Schreibe ich nun + 3 Meilen und — 3 Meilen, so ist der zweyte Weg eben so gut 3 Meilen als der erste, und durch (+ —) wird man nur erinnert, bey + 3 an den Weg nach Norden, bey — 3 aber an den Weg nach Süden zu denken. Demnach würde man statt positive, oder negative Größe, richtiger positiv oder negativ ausgedrückte Größe sagen.

3. Zusatz. Aus dem vorhergehenden erhellet auch deutlich, daß man sagen könne, die positive Größe sey weniger als nichts; sie ist nemlich weniger als nichts in Absicht auf die entgegengesetzte. Offenbar hat der, welcher 100 Thaler Vermögen hat, weniger als nichts von dem entgegengesetzten, denn um nichts von dem entgegengesetzten zu haben, mußte er 100 Thaler schuldig seyn, er würde also alsdann erst etwas von dem entgegengesetzten haben, wenn er mehr als 100 Thaler schuldig wäre.

Aber nur in diesem Verstande kann man eine positive oder negative Größe weniger als nichts nennen. An sich selbst ist jede von den genannten Größen mehr als nichts, weil sie wirkliche Größen sind. Es kömmt nemlich hier auf eine Bedeutung des Wortes Nichts an, welches in dem obigen Verstande genommen, nur ein relatives, kein absolutes Nichts seyn soll. Auch unter mehreren verneinten Größen einerley Art, als — 1, — 2, — 3, u. s. f. wird man diejenige für kleiner halten, welche als Größe, ohne Rücksicht auf das vorangesetzte Zeichen (—) größer ist; so wird — 7 eine kleinere Zahl als — 6, diese kleiner als — 5 u. s. f. seyn. Je größer nemlich eine Zahl a an sich betrachtet, ist, desto weniger als nichts wird — a von dem Entgegengesetzten bedeuten, weil ein desto größeres Entgegengesetztes + a erfordert wird, wenn es mit — a nichts geben soll.

4. Zusatz. Bisher haben die Mathematiker nur die negativen Größen für weniger als Nichts betrachtet. Wenn daher Vermögen als positiv betrachtet wird, so kann man die Schulden als negatives Vermögen ansehen, und alsdann sind Schulden im obigen Verstande weniger als Nichts vom Vermögen. Betrachtet man aber die Schulden als positiv, und das Vermögen als

negativ,

negativ, so ist alsdann das Vermögen weniger als Nichts von den Schulden.

Dieses rechtfertiget mich, wenn ich sage, positive Größen sind weniger als nichts, denn von ihnen läßt sich gewiß dasselbe als von negativen Größen, behaupten.

5. Zusatz. Der bekannte Grundsatz der Arithmetik, daß, wenn man von zween ungleichen Zahlen eine und eben dieselbe dritte Zahl abziehet, die größere Zahl einen größeren und die kleinere einen kleinern Rest giebt, mag ein Beyspiel geben, daß man durch ganz gemeine Rechnungen veranlaßt werden kann, sich solche Vorstellungen von bejahten und verneinten Zahlen zu machen, wobey man jene für größer, und diese für kleiner als nichts hält, und daß dies nur in der vorhin erklärten Bedeutung genommen werden kann.

Was auch a, b, c immer für Zahlen sind, so ist doch allemahl

$$a < a + b: \text{ also auch}$$

$$a - (a + b) < a + b - (a + b), \text{ oder}$$

$$a - a - b < 0, \text{ oder } - b < 0$$

Es ist ferner auch $a < a + b + c$, folglich auch

$$a - (a + b) < a + b + c - (a + b), \text{ oder}$$

$$- b < + c$$

Das heißt: jede verneinte Zahl $- b$ ist kleiner als Null, und kleiner als jede bejahte Zahl $+ c$

Dieses scheint nun unwiderleglich dargethan. Allein will man alles genau nehmen, so muß man bekennen, daß die vorhin gemachten Schlüsse nichts anders beweisen, als daß man oft einen arithmetischen Grundsatz da anwendet, wo er gar nicht anwendbar ist, oder von ihm mehr verlangt, als er wirklich geben kann: der Grundsatz setzt nemlich die Möglichkeit der Abziehung, und der dadurch zu erhaltenden Reste voraus, da doch dieses hier unmöglich ist, indem eine größere Zahl $a + b$ von einer kleinern a abgezogen werden soll, und $- b$, die hier zum Resultat herauskömmt, bedeutet nichts anders, als eine Zahl b, welche abgezogen werden müßte, wenn eine da wäre, wovon der Abzug geschehen könnte.

Anmerk. Aus allem, was im 3, 4 und 5ten Zusatz gesagt worden ist, erhellet, wie, so zu sagen, unmathematisch man reden muß, um die im 5. Zusatz enthaltenen Vorstellungen

stellungen zu rechtfertigen, zu welchen gewisse Rechnungen zu führen scheinen: es ist daher auch rathsam, diese unmathematische Sprache überall, wo es sich thun läßt, zu vermeiden, oder recht zu gebrauchen, wo sie nicht vermieden werden kann. Nimmt man den Ausdruck, weniger als nichts, nicht in dem Verstande, als solcher im 3ten Zusatz erklärt worden ist, so ist er falsch, und hat wirklich Mathematikverständige zu irrigen Vorstellungen von den verneinenden Größen verführet.

III. Capitel.

Von der Multiplication mit einfachen Größen.

§. 23.

Wenn zwey oder mehr gleiche Zahlen zusammen addirt werden, so läßt sich die Summe auf eine kürzere Art ausdrücken. Denn so ist

$a + a$ so viel als $2 . a$, und
$a + a + a$ so viel als $3 . a$, ferner
$a + a + a + a$ so viel als $4 . a$, u. s. w.

Woraus der Begriff von der Multiplication entspringt, da nämlich

$2 . a$ so viel ist, als 2 mal a, und
$3 . a$ so viel als 3 mal a, ferner
$4 . a$ so viel als 4 mal a, u. s. f.

1. Zusatz. Das Multiplicationszeichen ist (.) oder (×). Also 5 mal 6, kann ich auch so andeuten: $5 . 6$ oder 5×6.

2. Zusatz. Aus der gemeinen Rechenkunst ist bekannt, daß die Zahlen, die mit einander multiplicirt werden, den gemeinschaftlichen Nahmen Factoren haben, was herauskommt, heißt alsdann das Factum, oder Product, auch nennt man besonders den einen von zwey Factoren, der multipliciret werden

werden soll, den Multiplicandus, und der, womit multiplicirt wird, der Multiplicator.

§. 24.

Wenn also eine durch einen Buchstaben ausgedrückte Größe mit einer beliebigen Zahl multipliciret werden soll, so wird die Zahl bloß vor den Buchstaben geschrieben. Z. B.

a mit 20 multiplicirt giebt, 20 a, und
b mit 30 multiplicirt giebt, 30 b, u. s. w.

Solchergestalt ist ein c, einmal genommen, oder 1 c, so viel als c.

§. 25.

Dergleichen Producte können auch noch weiter leicht mit andern Zahlen multiplicirt werden. Z. B.

2 mal 3a macht 6a
3 mal 4b macht 12b
5 mal 7x macht 35x

welche noch ferner mit andern Zahlen sich multipliciren lassen.

§. 26.

Wenn die Zahl, mit welcher multipliciret werden soll, auch durch einen Buchstaben ausgedrückt wird, so pflegt man diesen Buchstaben dem andern Buchstaben unmittelbar vorzusetzen. Z. B. wenn b mit a multipliciret werden soll, so heißt das Product ab, und pq ist das Product, welches entstehet, wenn man die Zahl q mit p multiplicirt. Will man pq noch ferner mit a multipliciren, so kömmt heraus apq.

§. 27.

Hiebey ist wohl zu merken, daß es auch hier nicht auf die Ordnung der an einander gesetzten Buch-

Buchstaben ankomme, indem ab eben so viel ist, als ba; oder b und a mit einander multiplicirt, macht eben so viel, als a mit b multiplicirt. Um dieses zu begreifen, darf man nur für a und b bekannte Zahlen, als 3 und 4 nehmen, so giebt es sich von selbst: nemlich 3 mal 4 ist eben so viel, als 4 mal 3.

1. Zusatz. Daß ab gleich ba ist, davon überzeugt man sich ganz allgemein, wenn man so viel Punkte in einer Reihe vor sich hinschreibt, als der eine Factor z. B. a, Einheiten hat, und unter diese Reihe noch so viel solche Reihen, weniger eine, darunter setzt, als der andere Factor, hier b, Einheiten hat, hiedurch wird man deutlich überführt, daß b Reihen über oder unter einander stehen, wovon jede a Punkte enthält, demnach alle Reihen zusammen ab Punkte enthalten; ferner neben einander stehen a Reihen, in jeder b Punkte, mithin in allen a Reihen zusammen ba Punkte. Folglich ist ab = ba.

2. Zusatz. Da ab = ba, so ist auch abcd = bacd = = bcad = bcda u. s. w. Dieses gilt, wie man leicht siehet, wenn auch mehrere Factoren vorhanden sind; demnach ist der Satz allgemein wahr, daß einerley Factoren in veränderter Ordnung einerley Product geben.

§. 28.

Wenn statt der Buchstaben, welche unmittelbar an einander geschrieben sind, Ziffern gesetzt werden sollen, so sieht man leicht, daß dieselben alsdann nicht unmittelbar hinter einander geschrieben werden können. Denn wenn man statt 3 mal 4 schreiben wollte 34, so würde solches nicht zwölf, sondern vier und dreißig heißen. Wenn daher eine Multiplication mit bloßen Zahlen angedeutet werden soll, so pflegt man einen Punkt oder das Zeichen $\times$ zwischen dieselben zu setzen. Z. B.

3 . 4, bedeutet 3 mal 4, das ist 12. Eben so ist 1 . 2 oder 1 $\times$ 2 so viel als 2, und 1 . 2 . 3 ist 6. Ferner 1 . 2 . 3 . 4 . 56, ist 1344, und 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10, ist 3628800. u. s. f.

§. 29.

Hieraus ergiebt sich nun auch, was ein solcher Ausdruck 5.7.8.abcd bedeute; nemlich die Zahl 5 wird erstlich mit 7 multiplicirt, das Product ferner mit 8, dieses Product hernach mit a, und dieses wieder mit b, sodann mit c, und endlich mit d; wobey zu merken, daß statt 5.7.8, der Werth davon, nemlich die Zahl 5 mal 7, ist 35, und 8 mal 35 das ist 280 geschrieben werden kann.

§. 30.

Ferner ist zu merken, daß solche Ausdrücke, die aus der Multiplication mehrerer Zahlen entstehen, Producte genannt werden, Zahlen oder Buchstaben aber, welche einzeln sind, pflegt man Factoren zu nennen. Siehe §. 23. 2ter Zusatz.

§. 31.

Bis hieher haben wir nur positive Zahlen betrachtet, und da ist gar kein Zweifel, daß die daher entstehenden Producte nicht auch positiv seyn sollten. Nemlich + a mit + b multiplicirt, giebt unstreitig + ab. Was aber heraus komme, wenn + a mit — b, oder — a mit — b multiplicirt werde, erfordert eine besondere Erklärung.

§. 32.

Wir wollen erstlich — a mit 3 oder + 3 multipliciren. Weil nun — a als eine Schuld angesehen werden kann, so ist offenbar, daß, wenn diese Schuld 3 mal genommen wird, dieselbe auch 3 mal größer werden müsse. Folglich wird das gesuchte Product — 3a seyn. Und wenn daher — a mit b, das ist, mit + b multiplicirt werden soll, so wird heraus kommen — ba, oder, welches einerley ist,

— ab.

— ab. Hieraus ziehen wir den Schluß, daß, wenn eine positive Größe mit einer negativen multiplicirt werden soll, das Product negativ werde; woher sich diese Regel ergiebt: Positives mit Positivem, oder + mit + multiplicirt, giebt +, oder ein positives Product. Hingegen + mit —, oder — mit +, d. i. Positives mit Negativem, oder Negatives mit Positivem multiplicirt, giebt —, oder ein negatives Product.

§. 33.

Nun ist also noch ein Fall zu bestimmen übrig, nemlich, wenn — mit —, z. B. — a mit — b multiplicirt wird. Hierbey ist zuerst klar, daß das Product in Ansehung der Buchstaben heißen werde, ab; ob aber das Zeichen + oder — davor zu setzen sey, ist noch ungewiß; doch so viel ist gewiß, daß es entweder das eine, oder das andere seyn müsse. Nun aber, sage ich, kann es nicht das Zeichen — seyn. Denn — a mit + b multiplicirt, giebt — ab; und also — a mit — b multiplicirt, kann nicht eben das geben, was — a mit + b giebt; sondern es muß das Gegentheil herauskommen, nemlich das Product, + ab. Hieraus entsteht diese Regel: Negatives mit Negativem, oder — mit — multiplicirt, giebt + eben sowohl, als + mit +.

§. 34.

Diese Regeln pflegen auch zusammen gezogen und kurz mit diesen Worten ausgedrückt zu werden: Zwey gleiche Zeichen mit einander multiplicirt, geben +, zwey ungleiche Zeichen aber geben —. Wenn also diese Größen:

$+a, -b, -c, +d,$

mit einander multiplicirt werden sollen, so giebt erstlich $+a$ mit $-b$ mult. $-ab$, dieses mit $-c$, giebt $+abc$, und dieses endlich mit $+d$ multiplicirt, giebt $+abcd$.

§. 35.

Da nun die Sache in Ansehung der Zeichen keine Schwierigkeit hat, so ist noch übrig zu zeigen, wie zwey Zahlen, die schon Producte sind, mit einander multiplicirt werden sollen. Wenn die Zahl ab mit der Zahl cd multiplicirt werden soll, so ist das Product abcd, und entsteht also, wenn man erstlich ab mit c, und das, was man durch die Multiplication gefunden, ferner mit d multiplicirt.

Weil bestimmte Zahlen solches am besten erläutern, so sey z. B. die Zahl 36 mit 12 zu multipliciren; weil nun 12 so viel ist, als 3 mal 4, so hat man nur nöthig 36, erstlich mit 3 und das gefundene, nemlich 108, ferner mit 4 zu multipliciren, da man denn erhält:

432. welches so viel ist, als 12 mal 36.

§. 36.

Will man aber 5ab mit 3cd multipliciren, so könnte man auch wohl sagen 3cd5ab; da es aber hier nicht auf die Ordnung der mit einander multiplicirten Zahlen ankömmt, so pflegt man die Ziffern zuerst zu setzen, und schreibt das Product $5 \cdot 3 \cdot abcd$, oder 15abcd; weil 5 mal 3 so viel ist, als 15.

Eben so, wenn 12pqr mit 7xy, multipliciret werden soll, erhält man $12 \cdot 7pqrxy$, oder 84pqrxy.

IV. Capitel.

Von der Natur der ganzen Zahlen in Absicht auf ihre Factoren.

§. 37.

Wir haben bemerkt, daß ein Product aus zwey oder mehr mit einander multiplicirten Zahlen entstehe. Diese Zahlen werden die Factoren davon genannt.

Also sind die Factoren des Products abcd die Größen a, b, c, d.

§. 38.

Zieht man nun alle ganze Zahlen in Betracht, in sofern dieselben durch die Multiplication zweyer oder mehrerer Zahlen entstehen können, so wird man bald finden, daß einige gar nicht durch die Multiplication entspringen, und also keine Factoren haben, andere aber aus zwey und auch mehr Zahlen mit einander multiplicirt entstehen können, folglich zwey oder mehr Factoren haben. So ist z. B.

4 so viel als 2 . 2; ferner 6 so viel als 2 . 3, und
8 so viel als 2 . 2 . 2; ferner 27 so viel als 3 . 3 . 3, u.
10 so viel als 2 . 5, u. s. f.

§. 39.

Hingegen lassen sich die folgenden Zahlen:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, u. s. f.

nicht auf diese Art durch Factoren vorstellen, es wäre denn, daß man auch 1 zu Hülfe nehmen, und z. B. 2 durch 1 . 2, vorstellen wollte. Allein da mit 1 multiplicirt,

tiplicirt die Zahl nicht verändert wird, so wird auch 1 nicht unter die Factoren gezählt.

Alle diese Zahlen nun, welche nicht durch Factoren vorgestellt werden können, als:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 u. s. f.

werden einfache Zahlen, oder Primzahlen; die übrigen aber, welche sich durch Factoren vorstellen lassen, als:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 u. s. f.

zusammengesetzte Zahlen genannt.

§. 40.

Die einfachen oder Primzahlen verdienen also besonders in Erwägung gezogen zu werden; weil dieselben aus keiner Multiplication zweyer oder mehrerer Zahlen mit einander entstehen können. Wobey besonders dieses merkwürdig ist, daß, wenn dieselben der Reihe nach geschrieben werden, als:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 u. s. f.

darinn keine gewisse Ordnung wahrgenommen wird, sondern dieselben bald um mehr, bald um weniger fortspringen; und es hat auch bisher kein Gesetz, nach welchem sie fortgingen, ausfindig gemacht werden können.

Anmerk. Primzahlen sind in folgenden Schriften gesammlet: Johann Gottlob Krügers, Prof. der Arzneygel. zu Halle, Gedanken von der Algebra, nebst den Primzahlen von 1 bis 100000 (auf dem Titel steht falsch 1000000). Halle 1746. Peter Jäger, Roßschreiber und Quartiermeister zu Nürnberg, hatte diese Zahlen berechnet, auch eine vollständige anatomiam numerorum zu verfertigen gesucht. Lamberts Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen. Berlin 1770. enthalten außer anderen in verschiedenen Theilen der Mathematik sehr nützlichen

lichen Tabellen auch die Primzahlen von 1 bis 102000. Die Akademie der Wissenschaften zu Paris besitzt dergleichen Tabellen von Hrn. P. Mercastel und von Hrn. du Tour — bis jetzt sind solche aber noch nicht heraus gegeben. Eine Nachricht davon findet sich im 5ten Bande der Memoires étrangers présentés à l'Academie, bey Gelegenheit eines Memoire des Hrn. Rallier des Ourmes.

§. 41.

Die zusammengesetzten Zahlen aber, welche sich durch Factoren vorstellen lassen, entspringen alle aus den obigen Primzahlen, so daß alle Factoren davon Primzahlen sind. Denn wenn je ein Factor keine Primzahl, sondern zusammengesetzt wäre, so würde man denselben wieder durch zwey oder mehr Factoren, die Primzahlen wären, vorstellen können. Also wenn die Zahl 30 durch 5.6 vorgestellt wird, so ist 6 keine Primzahl, sondern 2.3, und also kann 30 durch 5.2.3, oder durch 2.3.5 vorgestellt werden, wo alle Factoren Primzahlen sind.

§. 42.

Erwägt man nun alle zusammengesetzte Zahlen, wie solche durch Primzahlen vorgestellt werden können, so findet sich darinn ein großer Unterschied, indem einige nur zwey dergleichen Factoren haben, andere drey oder mehr. Also ist, wie wir schon gesehen haben,

4	so viel als	2.2,	6	so viel als	2.3,
8	- - -	2.2.2,	9	- - - - -	3.3,
10	- - - -	2.5,	12	- - - -	2.3.2,
14	- - - -	2.7,	15	- - - - -	3.5,
16	-	2.2.2.2,		und so fort.	

§. 43.

Hieraus läßt sich begreifen, wie man von einer jeden Zahl ihre einfachen Factoren finden kann.

Wäre also die Zahl 360 gegeben, so hat man für dieselbe erstlich 2 . 180.

Nun aber ist

180 so viel als - - 2.90, und
90 so viel als - - 2.45, und
45 so viel als - - 3.15, und
15 so viel als - - 3.5.

Folglich wird die Zahl 360 durch folgende einfache Factoren vorgestellt:

2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 5.

als welche Zahlen alle mit einander multiplicirt die Zahl 360 hervorbringen.

Anmerk. Joh. Mich. Poetii gründliche Anleitung zu der unter den Gelehrten jetzt üblichen arithmetischen Wissenschaft, vermittelst einer parallelen Algebra; Frkf. u. Lpz. 1728; hat am Ende eine Anatomiam Numerorum oder Zergliederung der Zahlen von 1 bis 10000. Diese Zahlen findet man jetzt auch in andern Büchern abgedruckt, z. B. im Vollst. Mathem. Lexicon; II. Theil. Leipz. 1742. Bequemere Einrichtungen solcher Tabellen sind nachher von Lambert, Felkel und Hindenburg angegeben. Hr. Felkel hat solche Tabellen durch ein ihm eigenes mechanisches Verfahren berechnet von 1 bis 2 Millionen, davon ein völlig correctes Manuscript in dem Archiv des k. k. Hofkriegsrathes zu Wien vorhanden ist, ganz nach der Einrichtung der davon abgedruckten 17 Bogen. Tafel aller einfachen Factoren der durch 2, 3, und 5 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 408000. Hr. Hindenburg hat für seine Factoren-Tafeln weit bessere Einrichtungen als Hr. Felkel gefunden, und nach einer ihm ganz eigenen Erfindung berechnet er diese Tabelle auf eine mechanische Art mit unglaublicher Geschwindigkeit. — Schade, daß der Hr. Professor bis jetzt noch nicht Gelegenheit gefunden hat, diese Tafeln durch den Druck bekannter zu machen. In Kästners Fortsetzung der Rechenkunst, findet man Seite 540 u. f. mehrere hieher gehörige litterarische Nachrichten. Ich habe selbst auch Erfindungen gemacht, vermittelst welcher ich dergleichen Tabellen äußerst leicht mechanisch hinschreiben kann.

§. 44.

Wir sehen also hieraus, daß sich die Primzahlen durch keine andere Zahlen theilen lassen, hingegen die zusammengesetzten Zahlen am füglichsten in ihre einfachen Factoren aufgelöset werden, wenn man alle einfache Zahlen sucht, durch welche sich dieselben theilen lassen. Allein hiebey wird die Division gebraucht, von welcher in dem folgenden Capitel gehandelt werden soll.

V. Capitel.

Von der Division mit einfachen Größen.

§. 45.

Wenn eine Zahl in 2, 3, oder mehr gleiche Theile zertheilt werden soll, so geschieht solches durch die Division, welche die Größe eines solchen Theils bestimmen lehret. Also wenn die Zahl 12 in drey gleiche Theile zertheilt werden soll, so findet man durch die Division, daß ein solcher Theil 4 sey.

Man bedienet sich aber dabey gewisser Namen. Die Zahl, die zertheilt werden soll, heißt der Dividendus oder das Dividend, oder die zu theilende Zahl; die andere Zahl aber, welche anzeigt, in wie viel Theile die erstere zergliedert werden soll, wird der Divisor oder Theiler genannt. Die Größe eines solchen Theils aber, welcher durch die Division gefunden wird, pflegt der Quotus oder Quotient genannt zu werden. Also ist in dem angeführten Beyspiele

12 das Dividend, oder die zu theilende Zahl.
3 der Divisor oder Theiler, und
4 der Quotus oder Quotient.

§. 46.

Wenn man also eine Zahl durch 2 theilt, oder in 2 gleiche Theile zergliedert, so muß ein solcher Theil, d. i. der Quotient, zweymal genommen, gerade die vorgegebene Zahl ausmachen. Eben so, wenn eine Zahl durch 3 getheilt werden soll, muß der Quotient 3 mal genommen, dieselbe Zahl ausmachen; ja es muß überhaupt immer das Dividend herauskommen, wenn man den Quotienten und den Divisor mit einander multiplicirt.

§. 47.

Daher wird auch die Division eine Rechnungsart genannt, welche für den Quotienten eine solche Zahl finden lehrt, die, mit dem Divisor multiplicirt, gerade die zu theilende Zahl hervorbringet. Wenn also z. B. 35 durch 5 getheilt werden soll, so sucht man eine Zahl, welche mit 5 multiplicirt, 35 giebt. Diese Zahl ist daher 7; weil 5 mal 7 das Product 35 giebt. Man pflegt sich dabey dieses Ausdrucks zu bedienen: 5 in 35 habe ich 7 mal; denn 5 mal 7 ist 35.

§. 48.

Man stellt sich also das Dividend als ein Product vor, von welchem der eine Factor dem Divisor gleich ist, da denn der andre Factor den Quotienten anzeigt.

Wenn ich also 63 durch 7 dividiren soll, so suche ich ein Product, davon der eine Factor 7, und der andere also beschaffen ist, daß, wenn derselbe mit dieser 7 multiplicirt wird, genau 63 heraus kommen.

Ein

Ein solches ist nun 7 . 9, und deßwegen ist 9 der Quotient, welcher entspringt, wenn man 63 durch 7 dividirt.

§. 49.

Wenn daher auf eine ganz allgemeine Art die Zahl ab durch a getheilt werden soll, so ist der Quotient offenbar b; weil a mit b multiplicirt, das Dividend ab ausmacht. Hieraus ist ferner klar, daß, wenn man ab durch b dividiren soll, der Quotient a seyn werde.

Also muß überhaupt in allen Divisionsexempeln, wenn man das Dividend durch den Quotienten dividirt, der Divisor herauskommen. Z. B. da 24 durch 4 dividirt 6 giebt; so giebt auch umgekehrt 24 durch 6 dividirt 4.

§. 50.

Da nun alles darauf ankömmt, daß man das Dividend durch zwey Factoren vorstelle, deren einer dem Divisor gleich ist, weil alsdann der andere den Quotienten anzeigt; so wird man die folgenden Exempel leicht verstehen. Erstlich das Dividend abc durch a dividirt, giebt bc; weil a mit bc multiplicirt, abc ausmacht. Eben so kömmt, wenn abc durch b dividirt wird, ac heraus; und abc durch ac dividirt, giebt b. Hernach 12mn durch 3m dividirt, giebt 4n; weil 3m mit 4n multiplicirt 12mn ausmacht. Wenn aber eben diese Zahl 12mn durch 12 dividirt werden sollte, so würde mn herauskommen.

§. 51.

Weil eine jede Zahl a durch 1 . a ausgedrückt werden kann, so ist hieraus offenbar, daß, wenn man a oder 1 . a durch 1 theilen soll, alsdenn eben dieselbe Zahl a für den Quotienten heraus kömmt.

Hin-

Hingegen wenn eben dieselbe Zahl a oder 1 . a durch a getheilet werden soll, so wird der Quotient 1 seyn.

§. 52.

Es geschieht aber nicht immer, daß man das Dividend als ein Product von zwey Factoren vorstellen kann, deren einer dem Divisor gleich ist, und in solchen Fällen läßt sich die Division nicht auf diese Art bewerkstelligen. Denn wenn ich z. B. 24 durch 7 dividiren soll, so ist die Zahl 7 kein Factor von 24; weil 7 . 3 nur 21, und also zu wenig, hingegen 7 . 4 schon 28, und also zu viel ausmacht; doch sieht man hieraus, daß der Quotient größer seyn müsse als 3, und doch kleiner als 4. Daher, um denselben genau zu bestimmen, eine andere Art von Zahlen, die sogenannten **Brüche**, zu Hülfe genommen werden muß, wovon in einem der folgenden Capitel gehandelt werden soll.

§. 53.

Ehe man aber zu den Brüchen fortschreitet, so begnügt man sich, für den Quotienten die nächst kleinere ganze Zahl anzunehmen, dabey aber den Rest zu bestimmen, welcher übrig bleibt. So sagt man z. B. 7 in 24 habe ich 3 mal, der Rest aber ist 3, weil 3 mal 7 nur 21 macht, welche Zahl um 3 zu klein ist. Eben so ist folgendes Exempel zu verstehen:

6 | 34 | 5	nemlich der Divisor	ist	6,
| 30 |	das Dividend	ist	34,
4	der Quotient	ist	5,
	der Rest	ist	4,

9 | 41 | 4	und hier ist der Divisor	9,
| 36 |	das Dividend	41,
5	der Quotient	4,
	der Rest	5,

§. 54.

In solchen Exempeln, wo ein Rest übrig bleibt, ist folgende Regel zu merken:

Wenn man den Theiler mit dem Quotienten multiplicirt, und zum Product noch den Rest addirt, so muß der Dividendus herauskommen; und auf diese Art pflegt man die Division zu probiren, ob man recht gerechnet habe oder nicht.

Wird also in dem ersten der zwey letztern Exempel, der Divisor 6 mit dem Quotienten 5 multiplicirt, welches 30 giebt, und hierzu der Rest 4 addirt, so kömmt gerade der Dividendus 34 heraus.

Ebenfalls in dem letzten Exempel, wenn man den Theiler 9 mit dem Quotienten 4 multiplicirt, und zum Product 36 noch den Rest 5 addirt, so erhält man das Dividend 41.

§. 55.

Endlich ist hier auch noch nöthig, in Ansehung der Zeichen + und — anzumerken, daß, wenn + ab durch + a dividirt wird, der Quotient + b seyn werde, welches für sich klar ist.

Wenn aber + ab durch — a dividirt werden soll, so wird der Quotient — b seyn, weil — a mit — b multiplicirt + ab ausmacht.

Wenn ferner das Dividend — ab durch den Theiler + a dividirt werden soll, so wird der Quotient — b seyn, weil + a mit — b multiplicirt — ab d. i. den Dividendus giebt.

Soll endlich das Dividend — ab durch den Divisor — a getheilt werden, so wird der Quotus + b seyn, weil — a mit + b multiplicirt — ab ausmacht.

§. 56.

§. 56.

Es finden also bey der Division für die Zeichen + und — eben dieselben Regeln statt, welche wir oben bey der Multiplication angemerkt haben, nemlich:

+ durch + giebt +
+ durch — giebt —
— durch + giebt —
— durch — giebt +

oder kürzer: gleiche Zeichen geben plus, ungleiche aber minus.

§. 57.

Wenn also + 18pq durch — 3p dividiret werden soll, so wird der Quotient — 6q seyn. Denn — 3p multiplicirt durch — 6q macht + 18pq.

Ferner — 30xy durch + 6y dividirt, giebt — 5x, weil das Product aus + 6y in — 5x dem Dividend — 30xy gleich ist.

Ferner — 54abc durch — 9b dividirt, giebt + 6ac, weil — 9b mit + 6ac multiplicirt — 6.9abc, oder — 54abc giebt.

Dieses mag für die Division mit einfachen Größen genug seyn. Daher wir zur Erklärung der Brüche fortschreiten wollen, nachdem wir vorher noch etwas von der Natur der Zahlen in Ansehung ihrer Theiler werden bemerkt haben.

VI. Capitel.

Von den Eigenschaften der ganzen Zahlen in Ansehung ihrer Theiler.

§. 58.

Da wir gesehen haben, daß sich einige Zahlen durch gewisse Divisoren theilen lassen, andere aber nicht; so ist zur Erkenntniß der Zahlen nöthig, diesen Unterschied wohl zu bemerken, und diejenigen Zahlen, die sich durch irgend einen Divisor theilen lassen, von denjenigen, die sich dadurch nicht theilen lassen, wohl zu unterscheiden, und zugleich auch den Rest, welcher bey der Division der letztern übrig bleibt, wohl anzumerken. Zu dieser Absicht wollen wir die Divisoren

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, u. s. f., etwas genauer betrachten.

§. 59.

Es sey erstlich der Divisor 2. Die Zahlen, welche sich dadurch theilen lassen, sind folgende:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, u. s. f.

welche denn so fort immer um 2 steigen. Diese Zahlen werden insgesammt gerade Zahlen genannt.

Hingegen die übrigen Zahlen:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, u. s. f.

welche sich durch 2 nicht theilen lassen, ohne daß nicht 1 übrig bliebe, heißen ungerade Zahlen, und sind also immer um eins größer, oder kleiner als die geraden Zahlen. Die geraden Zahlen können

nun

nun alle in der allgemeinen Formel 2a begriffen werden; denn wenn man für a nach und nach alle Zahlen annimmt, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, u. s. f., so lassen sich daraus alle gerade Zahlen herleiten. Hingegen sind alle ungerade Zahlen in der Formel 2a + 1 enthalten; weil 2a + 1 um 1 größer ist, als die gerade Zahl 2a.

§. 60.

Zweytens. Es sey der Divisor 3; so sind alle Zahlen, die sich dadurch theilen lassen, folgende:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, u. s. f.

welche durch die Formel 3a vorgestellt werden können. Denn 3a, durch 3 dividirt, giebt a zum Quotienten, ohne Rest. Die übrigen Zahlen aber, wenn man sie durch 3 theilen will, lassen entweder 1, oder 2, zum Rest übrig, und sind also von zweyerley Art. Diejenigen, welche 1 übrig lassen, sind folgende:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, u. s. f.

und sind in der Formel 3a + 1 enthalten.

Die von der andern Art, welche 2 übrig lassen, sind folgende:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, u. s. f.

welche alle durch die Formel 3a + 2 vorgestellt werden können; so daß alle Zahlen entweder in der Form 3a, oder in dieser 3a + 1, oder in dieser 3a + 2 enthalten sind.

§. 61.

Wenn ferner der Divisor 4 ist, so sind alle Zahlen, die sich dadurch theilen lassen, folgende:

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, u. s. f.

welche immer um 4 steigen, und in der Formel 4a enthalten sind. Die übrigen Zahlen aber, welche man

man durch 4 nicht theilen kann, lassen entweder 1 zum Rest, und sind um 1 größer als jene, nemlich:

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, u. s. f.

welche folglich alle die Formel $4a + 1$ enthält.

Oder sie lassen 2 zum Rest, als:

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, u. s. f.

und sind in der Formel $4a + 2$ enthalten.

Oder endlich bleibt 3 zum Rest übrig, wie bey folgenden Zahlen:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, u. s. f.

welche in der Formel $4a + 3$ enthalten sind, so daß alle mögliche Zahlen durch eine von diesen vier Formeln, nemlich durch

$4a$, oder $4a + 1$, oder $4a + 2$, oder $4a + 3$

vorgestellt werden können.

§. 62.

Eben so verhält sich die Sache mit dem Divisor 5, da alle Zahlen, welche sich dadurch theilen lassen, in der Formel $5a$ enthalten sind. Diejenigen aber, welche sich dadurch nicht theilen lassen, sind entweder

$5a + 1$, oder $5a + 2$, oder $5a + 3$, oder $5a + 4$,

und so kann man weiter zu allen größern Divisoren fortschreiten.

Zusatz. Es sey allgemein n der Divisor, so sind alle mögliche Zahlen, welche sich durch n theilen lassen, in der Formel $n \cdot a$, und die sich nicht theilen lassen, in folgender Formel enthalten: $na + 1$, $na + 2$, - - - - $na + (n - 1)$, wo $n - 1$ der größte Rest ist.

§. 63.

Hierbey kömmt nun das zu statten, was oben von der Auflösung der Zahlen in ihre einfachen Factoren gesagt worden ist; weil eine jede Zahl, unter deren Factoren sich entweder

2, oder 3, oder 4, oder 5, oder 7, oder eine andere Zahl befindet sich auch durch dieselbe theilen läßt. Da z. B.

60 so viel ist als: 2 . 2 . 3 . 5;

so ist klar, daß sich 60 durch 2, durch 3, und auch durch 5 theilen lasse.

Anmerk. Weiter unten werden Kennzeichen angegeben werden, um zu entscheiden, ob eine Zahl durch eine andere theilbar oder nicht theilbar sey.

§. 64.

Da überhaupt der Ausdruck abcd sich nicht nur durch a und b und c und d, sondern auch durch folgende

ab, ac, ad, bc, bd, cd; ferner durch
abc, abd, acd, bcd; und endlich auch durch
abcd, d. i. durch sich selbst, theilen läßt,

so muß sich gleichfalls 60, d. i. 2.2.3.5, außer den einfachen Zahlen, auch durch die theilen lassen, die aus zwey einfachen zusammengesetzt sind, nemlich durch

4, 6, 10, 15,

ferner auch durch die, welche aus dreyen bestehen, als:

12, 20, 30,

und endlich auch durch 60, d. i. durch sich selbst.

§. 65.

Wenn man also eine beliebige Zahl durch ihre einfachen Factoren vorgestellt hat, so ist es sehr leicht, alle diejenigen Zahlen anzuzeigen, wodurch sich dieselbe theilen läßt. Denn man darf nur erstlich einen jeden von den einfachen Factoren für sich selbst nehmen, hernach je zwey, je drey, je vier, und so fort mit einander multipliciren, bis man auf die gegebene Zahl selbst kommt.

§. 66.

§. 66.

Vor allen Dingen ist hier zu merken, daß sich eine jede Zahl durch 1, so wie auch durch sich selbst, theilen läßt; also daß eine jede Zahl zum wenigsten zwey Theiler oder Divisoren hat, nemlich 1, und sich selbst. Welche Zahlen nun außer diesen beyden Theilern keine andere haben, sind eben diejenigen, welche oben einfache oder Primzahlen genannt wurden.

Alle zusammen gesetzte Zahlen aber haben, außer 1 und sich selbst, noch andere Divisoren, wie aus folgender Tafel zu sehen ist, wo unter jeder Zahl alle ihre Theiler stehen, deren Anzahl zugleich bemerkt worden ist. Die Primzahlen werden durch den Buchstaben p angedeutet.

Tafel,

welche die Theiler der ganzen Zahlen von 1 bis 20 enthält (§. 59.).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	3	2	5	2	7	2	3	2	11	2	13	2	3	2	17	2	19	2
			4		3		4	9	5		3		7	5	4		3		4
					6		8		10		4		14	15	8		6		5
											6				16		9		10
											12						18		20
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
p.	p.	p.		p.		p.				p.		p.				p.		p.	

§. 67.

Endlich ist noch zu merken, daß 0 als eine solche Zahl angesehen werden kann, welche sich durch alle mögliche Zahlen theilen läßt; weil der Quotient, wenn man 0 durch eine beliebige Zahl oder Größe, z. B. durch 2, 3, 4 oder a dividirt, allezeit wieder 0 ist. Denn zweymal 0 ist 0, dreymal 0 ist 0, viermal 0 ist 0, und a mal 0 ist 0, da es unmöglich

ist, aus Nichts, wenn man es auch noch so oft wiederholt, etwas heraus zu bringen.

Zusatz. Da 2 a jede gerade Zahl bedeutet, so gehört 2.0 oder 0 auch unter die geraden Zahlen.

Ein Satz, der nicht, wie es beym ersten Ansehen scheinen möchte, ein bloßes Wortspiel ist. Er sagt: daß, was von geraden Zahlen wahr ist, auch von 0 gilt, aber nicht, was nur von ungeraden wahr ist. Man sehe die vortrefliche Fortsetzung der Rechenkunst von dem Herrn Hofrath Kästner. Göttingen, 1786. Seite 541 No. 6.

VII. Capitel.

Von den Brüchen überhaupt.

§. 68.

Wenn sich eine Zahl, z. B. 7, durch eine andere, z. B. durch 3, nicht theilen läßt; so ist dieses nur so zu verstehen, daß sich der Quotient nicht durch eine ganze Zahl ausdrücken läßt, keinesweges aber, daß es überhaupt unmöglich sey, sich einen Begriff von dem Quotienten zu machen.

Man darf sich nur eine Linie, die 7 Fuß lang ist, vorstellen, so wird wohl niemand zweifeln, daß es nicht möglich seyn sollte, diese Linie in 3 gleiche Theile zu zergliedern, und sich einen Begriff von der Größe eines solchen Theils zu machen.

§. 69.

Da man sich nun einen deutlichen Begriff von dem Quotienten, der in solchen Fällen herauskömmt, machen kann, obgleich derselbe keine ganze Zahl ist, so werden wir hierdurch auf eine besondere Art von Zahlen geleitet, welche Brüche oder gebrochene Zahlen genannt werden.

So

So haben wir im obigen Beispiele, wo 7 durch 3 dividirt werden soll, einen deutlichen Begriff von dem daher entspringenden Quotienten, und man pflegt denselben auf folgende Art anzuzeigen: $\frac{7}{3}$; wo die oben gesetzte Zahl 7 das Dividend, und die unten gesetzte Zahl 3 der Divisor ist.

§. 70.

Wenn also auf eine allgemeine Art die Zahl a durch die Zahl b getheilt werden soll, so wird der Quotient durch $\frac{a}{b}$ angedeutet, welcher Ausdruck auch ein Bruch genannt wird; daher man sich keinen bessern Begriff von einem solchen Bruch $\frac{a}{b}$ machen kann, als daß man sagt, es werde dadurch der Quotient angezeigt, welcher entspringe, wenn man die obere Zahl durch die untere dividire. Hierbey ist noch zu merken, daß bey allen dergleichen Brüchen die untere Zahl der Nenner, welcher beym Dividiren der Divisor heißt, die obere aber, die man als den Dividendus betrachten kann, der Zähler genant zu werden pflegt.

§. 71.

In dem oben angeführten Bruch $\frac{7}{3}$, welcher sieben Drittel ausgesprochen wird, ist 7 der Zähler, und 3 der Nenner.

Eben so heißt dieser Bruch

$\frac{2}{3}$, zwey Drittel. $\frac{3}{4}$, drey Viertel.

$\frac{3}{8}$, drey Achtel. $\frac{12}{100}$, zwölf Hundertel.

Der Bruch $\frac{1}{2}$ wird gemeiniglich ein Halbes, anstatt ein Zweytel, gelesen; denn eigentlich ist $\frac{1}{2}$ der Quotient, welcher herauskömmt, wenn man 1 in zwey gleiche Theile zerschneidet, da dann, wie bekannt, ein solcher Theil ein Halbes genannt wird.

§. 72.

Um nun die Natur der Brüche recht kennen zu lernen, wollen wir erstlich das Beyspiel $\frac{a}{a}$ betrachten, wo die obere Zahl der untern, oder der Zähler dem Nenner gleich ist. Weil nun dadurch der Quotient angedeutet wird, der herauskömmt, wenn man a durch a dividiret; so ist klar, daß dieser Quotient gerade 1, folglich dieser Bruch $\frac{a}{a}$ so viel als ein Ganzes ist. Daher sind folgende Brüche:

$\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$ u. s. f.

alle einander gleich, und ein jeder derselben ist so viel als Eins, oder ein Ganzes.

§. 73.

Da nun jeder Bruch, dessen Zähler dem Nenner gleich ist, Eins beträgt, so sind alle Brüche, deren Zähler kleiner sind, als ihre Nenner, weniger als Eins. Denn wenn ich eine kleinere Zahl durch eine größere dividiren soll, so kömmt weniger als 1 heraus. Wenn z. B. eine Linie von 2 Fuß in 3 gleiche Theile zerschnitten werden soll, so wird ein Theil unstreitig kleiner seyn, als ein Fuß; daher sich leicht einsehen läßt, daß $\frac{2}{3}$ weniger ist, als 1, und dies eben deswegen, weil der Zähler 2 kleiner ist, als der Nenner 3.

§. 74.

Ist hingegen der Zähler größer, als der Nenner, so ist der Werth des Bruchs größer als Eins. Also ist $\frac{3}{2}$ mehr als 1, weil $\frac{3}{2}$ so viel ist als $\frac{2}{2}$ und noch $\frac{1}{2}$. Nun aber ist $\frac{2}{2}$ so viel als 1; folglich ist $\frac{3}{2}$ so viel als $1\frac{1}{2}$, nemlich ein Ganzes und noch ein Halbes.

Eben so ist:

$\frac{4}{3}$ so viel als $1\frac{1}{3}$; ferner $\frac{5}{3}$ so viel $1\frac{2}{3}$; weiter $\frac{7}{3}$ so viel als $2\frac{1}{3}$.

Ueberhaupt darf man in diesen Fällen nur die obere Zahl durch die untere dividiren, und zum Quotienten noch einen Bruch hinzusetzen, dessen Zähler der Rest, der Nenner aber der Divisor ist. Also für den Bruch $\frac{43}{12}$ dividirt man 43 durch 12, und bekömmt 3 zum Quotienten und 7 zum Rest; daher ist $\frac{43}{12}$ so viel als $3\frac{7}{12}$.

§. 75.

Hieraus sieht man, wie Brüche, deren Zähler größer sind, als ihre Nenner, in zwey Glieder aufgelöst werden können, wovon das erste eine ganze Zahl ausmacht, das andere aber einen Bruch, dessen Zähler kleiner ist, als sein Nenner. Aus diesem Grunde werden solche Brüche, wo der Zähler größer ist als der Nenner, unächte oder Bastardbrüche genannt; weil sie eins, oder mehr Ganze in sich begreifen. Hingegen sind die ächten Brüche solche, deren Zähler kleiner sind, als die Nenner, und deren Werth folglich weniger ist, als Eins, oder weniger als ein Ganzes.

§. 76.

Man pflegt sich die Natur der Brüche noch auf eine andere Art vorzustellen, wodurch die Sache nicht wenig erläutert wird. Wenn man z. B. den Bruch $\frac{3}{4}$ betrachtet, so ist klar, daß derselbe 3mal größer ist, als $\frac{1}{4}$. Nun aber bestehet die Bedeutung des Bruchs $\frac{1}{4}$ darinn, daß, wenn man 1 in 4 gleiche Theile zertheilt, ein solcher Theil den Werth desselben anzeiget. Wenn man daher drey solcher

Theile zusammen nimmt, so erhält man den Werth des Bruchs $\frac{3}{4}$.

Eben so kann man einen jeden andern Bruch betrachten, z. B. $\frac{7}{12}$: wenn man 1 in 12 gleiche Theile zerschneidet, so machen 7 dergleichen Theile den Werth des vorgelegten Bruches aus.

§. 77.

Aus dieser Vorstellung sind auch die oben erwähnten Namen des Zählers und Nenners entsprungen. Denn weil in dem vorigen Bruch $\frac{3}{4}$ die untere Zahl 4 anzeiget, daß die Einheit in vier gleiche Theile zertheilt werden müsse, und also diese Theile benennet, so wird dieselbe füglich der Nenner genannt.

Da aber die obere Zahl, nemlich 3, anzeigt, daß für den Werth des Bruchs 3 dergleichen Theile zusammen genommen werden müssen, und also dieselbe gleichsam darzählet, so wird die obere Zahl der Zähler genannt.

§. 78.

Betrachten wir nun die Brüche, deren Zähler 1 ist, als solche, die den Grund der übrigen enthalten, weil man leicht begreift, was $\frac{3}{4}$ bedeutet, wenn man weiß, was $\frac{1}{4}$ ist, so sind dergleichen Brüche folgende:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}$ u. s. f.

Hierbey ist zu merken, daß diese Brüche immer kleiner werden; denn in je mehr Theile ein Ganzes zerschnitten wird, desto kleiner werden auch die Theile. So ist z. B. $\frac{1}{100}$ kleiner als $\frac{1}{10}$, und $\frac{1}{1000}$ kleiner als $\frac{1}{100}$; ferner $\frac{1}{10000}$ kleiner als $\frac{1}{1000}$; und $\frac{1}{100000}$ kleiner als $\frac{1}{10000}$.

§. 79.

Hieraus sieht man nun, daß, je mehr bey solchen Brüchen der Nenner vergrößert werde, der Werth derselben um so viel kleiner werden müsse. Hiebey entsteht nun die Frage, ob der Nenner nicht so groß angenommen werden könne, daß der Bruch gänzlich verschwinde, und zu nichts werde? Dieses aber wird mit Recht verneint. Denn in so viel gleiche Theile man auch immer Eins, z. B. die Länge eines Fußes, zertheilen mag, so behalten die Theile doch noch immer eine gewisse Größe, und sind folglich nicht nichts.

§. 80.

Es ist zwar wahr, daß, wenn man die Länge eines Fußes in mehr als 1000 gleiche Theile zertheilt, die Theile fast nicht mehr in die Augen fallen. So bald man sie aber durch ein gutes Vergrößerungsglas betrachtet, so erscheinen dieselben so groß, daß sie leicht von neuem in 100 und noch mehrere Theilchen könnten zertheilt werden.

Hier ist aber die Rede keinesweges von dem, was wirklich kann verrichtet werden, und was noch in die Augen fällt, sondern vielmehr von demjenigen, was an sich möglich ist. Und da ist allerdings gewiß, daß, so groß auch immer der Nenner angenommen werden mag, der Bruch gleichwohl nicht gänzlich verschwinde, oder in nichts, oder 0, verwandelt werde.

§. 81.

Weil man nun, so sehr auch der Nenner vermehret würde, niemals gänzlich zu nichts kömmt, sondern diese Brüche noch immer einige Größe behalten, und also die oben gesetzte Reihe der Brüche immer weiter ohne Ende fortgesetzt werden kann; so

pflegt man zu sagen, daß der Nenner unendlich groß seyn müßte, wenn endlich der Bruch zu 0 oder nichts werden sollte. Denn das Wort unendlich will hier eben so viel sagen, als daß man mit dem erwähnten Bruche niemals zu Ende komme.

§. 82.

Um nun diesen Begriff, welcher allerdings fest gegründet ist, vorzustellen, bedient man sich des Zeichens ∞, welches eine unendlich große Zahl andeutet; und daher kann man sagen, daß dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ ein wirkliches Nichts sey, eben deswegen, weil ein solcher Bruch niemals Nichts werden kann, so lange der Nenner noch nicht ins Unendliche vermehret worden ist.

§. 83.

Dieser Begriff von dem Unendlichen ist desto sorgfältiger zu bemerken, weil derselbe aus den ersten Gründen unserer Erkenntniß hergeleitet worden ist, und in dem folgenden von der größten Wichtigkeit seyn wird. Es lassen sich schon hier daraus solche Folgen ziehen, welche unsere Aufmerksamkeit verdienen, da dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ den Quotienten anzeigt, wenn man das Dividend 1 durch den Divisor ∞ dividirt. Nun wissen wir schon, daß, wenn man das Dividend 1 durch den Quotienten, welcher $\frac{1}{\infty}$ oder 0 ist, wie wir gesehen haben, dividirt, alsdann der Divisor, nemlich ∞, herauskomme. Daher erhalten wir einen neuen Begriff von dem Unendlichen, nemlich daß dasselbe herauskomme, wenn man 1 durch 0 dividirt. Folglich kann man mit Grunde sagen, daß $\frac{1}{0}$, d. i. durch 0 dividiret, eine unendlich große Zahl, oder ∞ anzeige.

§. 84.

Hier ist es nöthig, noch einen sehr gewöhnlichen Irrthum aus dem Wege zu räumen, indem viele behaupten, eine unendliche Größe könne weiter nicht vermehret werden. Aber dies kann mit obigen richtigen Gründen nicht bestehen.

Denn da $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl andeutet, und $\frac{2}{0}$ unstreitig zweymal, $\frac{3}{0}$ dreymal, und $\frac{4}{0}$ viermal so groß ist, als $\frac{1}{0}$; so folgt hieraus, daß auch so gar eine unendlich große Zahl weit größer werden könne.

Anmerk. Dem Anfänger ist es gewiß nicht zu verdenken, wenn er die Begriffe vom Unendlichen nicht so ganz leicht findet. Große Mathematikverständige selbst sind hierüber verschiedener Meynung, und nicht selten sind einige von ihnen dadurch auf ungereimte Behauptungen gekommen. Wer Beruf hat Mathematik zu studiren, darf die Kästnerischen Schriften nicht ungelesen lassen, diese vortreflichen Lehrbücher allein geben ihm gewiß den vollständigsten und richtigsten Begriff vom Unendlichen, und wer Gefühl für Wahrheit hat, wird diese Schriften nie ohne Begeisterung, und Hochachtung für diesen verehrungswürdigen Greis lesen. Im folgenden Zusatz werde ich das nöthige darüber mittheilen.

Zusatz. Daß ich jemand Nichts gebe, wenn ich ihm einmal Nichts gebe, und daß er nicht mehr bekömmt, wenn ich ihm zweymal, dreymal u. s. w. Nichts gebe, das läßt sich auch wohl einem Kinde spielend begreiflich machen.

Also: 0 ein Faktor, ist nichts weiter als ein ganz leichter Begriff der natürlichen Rechenkunst wissenschaftlich ausgedrückt. Aber vor einem Bruch fürchten sich schon Erwachsene; und noch mehr vor einem Bruche, dessen Nenner nicht etwa 2; 3; 4; oder eine große ganze Zahl, sondern selbst ein Bruch ist, z. E.

$$\frac{1}{\frac{1}{1000000000}}$$

Wer sich also einen Begriff von $\frac{1}{0}$ machen sollte, würde wohl zuerst darauf fallen, sich statt des Nenners oder Divisors einen sehr kleinen Bruch vorzustellen, da er dann einsähe, daß der Quo-

Quotient eine sehr große Zahl seyn müsse, die immer größer wird, je kleiner er den Divisor macht. Also kann er bey $\frac{1}{0}$ nichts denken, als etwas Größers als alle Zahlen, die er denken kann.

Diese Vorstellung, wenn man nun auch das Unendlich brauchen will, ist gewiß nicht so leicht, als die vom Nichts. Man könnte also wohl verstehen, was o als Faktor bedeutet, ohne zu verstehen, was es als Divisor bedeutet.

Und eigentlich läßt sich das letzte gar nicht verstehn. Niemand versteht: wie oft Nichts in Etwas enthalten ist, obgleich jedermann versteht, daß, Etwas, keinmal gegeben, Nichts gegeben heißt.

Alle Nullen oder Nichtse sind einerley, also $a . 0 = b . 0 = 0$; denn bey Nichts denkt man sich bestimmt: keine Größe. Ein Nichts ist nicht mehr noch weniger als das andere — dieses müssen sich Anfänger der Algebra wohl merken, damit sie nicht zu Fehlschlüssen verleitet werden.

Unendlich groß ist kein bestimmter Begriff, jede Größe, von der man einen solchen Begriff hat, ist bestimmt. Wer eine nicht mehr zählbare Menge denkt, denkt sie nicht als nur eine, eigentlich ist sein Begriff nur verneint: nicht mehr zählbar. Nach dem Geständnisse aller Mathematiker ist dieser Begriff viel schwerer als der vom Nichts. Auch hat man nie über das Nichts gestritten, aber viel über das Unendliche.

Daß man bey $2 . 0$; $3 . 0$ nichts anders denkt, als bey $1 . 0$, habe ich oben gezeigt. Aber bey $2 . \infty$; $3\ \infty$ u. s. w. denkt man gewiß etwas anders, als bey $1 . \infty$. Das ist, was ich damit sagen will, wer eine unzählbare Menge denkt, denkt sie nicht als nur eine. Leipz. Mag. für reine und angewandte Mathematik. Drittes Stück 1786, Seite 419.

VIII. Capitel.

Von den Eigenschaften der Brüche.

§. 85.

Wie wir oben (§. 72.) gesehen haben, daß jeder dieser Brüche,

$$\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}, \frac{6}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{8}, \text{ u. s. f.}$$

ein Ganzes ausmache, und folglich alle gleich sind; so sind auch folgende Brüche,

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \frac{12}{6}, \text{ u. s. f.}$$

einander gleich, weil jeder zwey Ganze ausmacht: denn es giebt der Zähler eines jeden, durch seine Nenner dividirt, 2. Eben so sind alle diese Brüche,

$$\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \frac{15}{5}, \frac{18}{6}, \text{ u. s. f.}$$

einander gleich, weil der Werth eines jeden 3 beträgt.

§. 86.

So läßt sich der Werth aller Brüche auf unendlich vielfältige Art vorstellen. Denn wenn man sowohl den Zähler als den Nenner eines Bruchs durch eine beliebige Zahl, die man multiplicirt, so behält der Bruch immer gleichen Werth. Also sind alle diese Brüche,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \frac{8}{16}, \frac{9}{18}, \frac{10}{20}, \text{ u. s. f.}$$

einander gleich, und ein jeder so viel als $\frac{1}{2}$. Eben so sind auch alle diese Brüche,

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \frac{8}{24}, \frac{9}{27}, \frac{10}{30}, \text{ u. s. f.}$$

einander gleich, und der Werth eines jeden $\frac{1}{3}$. Ferner sind auch folgende Brüche, als:

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15}, \frac{12}{18}, \frac{14}{21}, \frac{16}{24}, \text{ u. s. f.}$$

einander gleich; daher allgemein der Bruch $\frac{a}{b}$ auf folgende Arten vorgestellt werden kann,

$\frac{a}{b}$, $\frac{2a}{2b}$, $\frac{3a}{3b}$, $\frac{4a}{4b}$, $\frac{5a}{5b}$, $\frac{6a}{6b}$ u. s. f., wovon jeder so groß ist, als der erste $\frac{a}{b}$.

§. 87.

Um dies zu beweisen, darf man nur statt des Werths des Bruchs $\frac{a}{b}$ einen besondern Buchstaben, als c, schreiben, so, daß c der Quotient sey, wenn man a durch b dividirt. Nun aber ist vorher (§. 46) gezeigt worden, daß wenn man den Quotienten c mit dem Divisor b multiplicirt, der Dividendus herauskommen müsse.

Da nun c mit b multiplicirt a giebt, so wird c mit 2b multiplicirt 2a, c mit 3b multiplicirt 3a, und überhaupt c mit mb multiplicirt ma geben.

Macht man hieraus wieder ein Divisionsexempel und dividirt das Product ma durch den einen Factor mb, so muß der Quotient dem andern Factor c gleich seyn: aber ma durch mb dividirt, giebt den Bruch $\frac{ma}{mb}$; daher der Werth desselben c ist. Da nun c auch dem Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$ gleich ist, so ist offenbar, daß der Bruch $\frac{ma}{mb}$ dem Bruch $\frac{a}{b}$ gleich sey, man mag statt m eine Zahl annehmen, welche man will.

§. 88.

Weil aber jeder Bruch durch unendlich verschiedene Formen von gleichem Werth dargestellt werden kann,

kann, so wird man unstreitig diejenige am leichtesten fassen, welche aus den kleinsten Zahlen besteht. So könnte man z. B. statt $\frac{2}{3}$ einen jeden der folgenden Brüche, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$ u. s. f. nach Willkühr setzen; es wird aber niemand zweifeln, daß nicht die Form $\frac{2}{3}$ von allen die deutlichste sey. Hiebey läßt sich nun noch die Frage aufwerfen, wie man einen Bruch, der nicht in seine kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, als z. B. $\frac{8}{12}$, auf seine kleinste Form, nemlich $\frac{2}{3}$, bringen könne?

§. 89.

Diese Frage läßt sich am leichtesten auflösen, wenn man bedenkt, daß jeder Bruch seinen Werth behält, wenn sowohl Zähler als Nenner mit einerley Zahl multiplicirt werden. Denn daraus folgt, daß, wenn man auch den Zähler und Nenner eines Bruchs durch eben dieselbe Zahl dividirt, der Bruch einen gleichen Werth behalten müsse. Noch leichter ergiebt sich dies aus der allgemeinen Form $\frac{na}{nb}$. Denn wenn man sowohl den Zähler na als den Nenner nb durch die Zahl n dividirt, so kommt der Bruch $\frac{a}{b}$ heraus, der jenem gleich ist, wie schon vorher (§. 87.) gezeigt worden ist.

§. 90.

Um nun einen vorgegebenen Bruch auf seine kleinste Form zu bringen, muß man solche Zahlen finden, wodurch sich sowohl Zähler als Nenner theilen lassen. Diese Zahl wird der **gemeine Theiler** genannt, und so lange man zwischen dem Zähler und Nenner einen gemeinen Theiler anzeigen kann, so lange läßt sich der Bruch noch auf eine

kleinere

kleinere Form bringen; findet aber außer 1 kein gemeiner Theiler weiter statt, so ist der Bruch schon auf seine kleinste Form gebracht.

§. 91.

Um dies zu erläutern, wollen wir den Bruch $\frac{48}{120}$ betrachten. Hier sieht man gleich, daß sich Zähler und Nenner durch 2 theilen lassen, woraus der Bruch $\frac{24}{60}$ entsteht. Dieser läßt sich nun noch einmal durch 2 theilen, und so entsteht ein neuer Bruch $\frac{12}{30}$. Auch hier ist 2 nochmal der gemeine Theiler, wodurch man $\frac{6}{15}$ erhält. Man sieht aber leicht, daß Zähler und Nenner sich noch durch 3 theilen lassen, woraus endlich der Bruch $\frac{2}{5}$ entspringt, welcher dem vorgegebenen gleich ist, und sich in seiner kleinsten Form befindet, weil die Zahlen 2 und 5 weiter keinen gemeinschaftlichen Theiler haben als 1, welcher keine Zahl verkleinert.

§. 92.

Diese Eigenschaft der Brüche, daß, wenn man Zähler und Nenner mit Einer Zahl entweder multiplicirt oder dividirt, der Werth des Bruchs unverändert bleibe, ist von der größten Wichtigkeit und es gründet sich hierauf fast die ganze Lehre von den Brüchen. So lassen sich z. B. zwey Brüche nicht gut addiren, oder von einander subtrahiren, ehe man sie nicht in andere Formen gebracht hat, deren Nenner einander gleich sind; wovon im folgenden Capitel gehandelt werden soll.

§. 93.

Es ist hier nur noch zu bemerken, daß man auch jede ganze Zahl in Form eines Bruchs vorstellen könne. So ist z. B. 6 so viel als $\frac{6}{1}$, weil 6 durch 1 divi-

1 dividirt auch 6 giebt. Und daher entstehen noch folgende Formen,

$\frac{12}{2}$, $\frac{18}{3}$, $\frac{24}{4}$, $\frac{36}{6}$, u. s. f.

welche alle einen gleichen Werth, nemlich 6, in sich enthalten.

IX. Capitel.

Von der Addition und Subtraction der Brüche.

§. 94.

Haben mehrere Brüche gleiche Nenner, so macht ihre Addition und Subtraction keine Schwierigkeit, indem $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$ so viel als $\frac{5}{7}$ und $\frac{4}{7}-\frac{2}{7}$ so viel als $\frac{2}{7}$ ist. In diesem Fall addirt oder subtrahirt man bloß die Zähler, und schreibt den gemeinschaftlichen Nenner darunter. Also macht

$\frac{7}{100}+\frac{9}{100}-\frac{12}{100}-\frac{15}{100}+\frac{20}{100}$ so viel als $\frac{9}{100}$:
$\frac{24}{50}-\frac{7}{50}-\frac{12}{50}+\frac{31}{50}$ so viel als $\frac{36}{50}$ oder $\frac{18}{25}$:
$\frac{16}{20}-\frac{3}{20}-\frac{11}{20}+\frac{14}{20}$ so viel als $\frac{16}{20}$ oder $\frac{4}{5}$:

eben so macht $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$ so viel als $\frac{3}{3}$ oder 1, das ist ein Ganzes, und $\frac{2}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$ so viel als $\frac{0}{4}$, das ist nichts, oder 0.

§. 95.

Wenn aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so ist es jedesmal möglich, sie in andere von gleichem Werth zu verwandeln, deren Nenner gleich sind. Also wenn die Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ gegeben sind, und zusammen addirt werden sollen, so ist zu bemerken, daß $\frac{1}{2}$ so viel ist, als $\frac{3}{6}$ und $\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{2}{6}$: man

 hat

hat also statt der vorigen die Brüche $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$, welche $\frac{5}{6}$ geben. Ferner bey $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ist derselbe Fall, nur daß das Zeichen minus dazwischen steht; also $\frac{3}{6} - \frac{2}{6}$ giebt $\frac{1}{6}$. Sind ferner diese Brüche gegeben $\frac{3}{4} + \frac{5}{8}$, so kann man anstatt $\frac{3}{4}$ den Bruch $\frac{6}{8}$ setzen, da denn $\frac{6}{8} + \frac{5}{8} = \frac{11}{8}$ oder $1\frac{3}{8}$ giebt. Frägt man, wie viel $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ zusammen ausmachen, so schreibe man statt dessen nur $\frac{4}{12}$ und $\frac{3}{12}$, welches denn $\frac{7}{12}$ giebt.

§. 96.

Wenn mehr als zwey Brüche gegeben sind, als: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, die unter gleiche Nenner gebracht werden sollen, so kommt es blos darauf an, daß man eine Zahl finde, die sich durch alle diese Nenner theilen lasse. Eine solche ist nun 60, welche der gemeinschaftliche Nenner oder sogenannte **Hauptnenner** wird. Also hat man statt $\frac{1}{2}$ diesen $\frac{30}{60}$, statt $\frac{2}{3}$ diesen $\frac{40}{60}$, statt $\frac{3}{4}$ diesen $\frac{45}{60}$, statt $\frac{4}{5}$ diesen $\frac{48}{60}$, und statt $\frac{5}{6}$ diesen $\frac{50}{60}$. Sollten nun diese Brüche $\frac{30}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$, $\frac{50}{60}$, zusammen addirt werden, so geben sie zusammen $\frac{213}{60}$, oder 3 Ganze und $\frac{33}{60}$, oder $3\frac{11}{20}$.

§. 97.

Es kommt hierbey darauf an, daß man zwey Brüche von ungleichen Nennern in andere verwandele, deren Nenner einander gleich sind. Um dieses auf eine allgemeine Art thun zu können, so setze man, es wären die vorgegebenen Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. Nun multiplicire man den ersten Bruch oben und unten mit d, so bekommt man $\frac{ad}{bd}$, welcher Bruch gleich $\frac{a}{b}$ ist; den andern Bruch multiplicire man wie den ersten oben und unten mit b, so bekommt man

man statt seiner $\frac{bc}{bd}$, in welcher Gestalt die Nenner gleich sind und die Summe $\frac{ad+bc}{bd}$ und die Differenz $\frac{ad-bc}{bd}$ ist. Wenn also folgende Brüche gegeben sind, $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{9}$, so bekommt man dafür $\frac{45}{72}$ und $\frac{56}{72}$, deren Summe $\frac{101}{72}$, die Differenz aber $\frac{11}{72}$ beträgt.

§. 98.

Hier pflegt auch die Frage vorzukommen, welcher von zwey gegebenen Brüchen größer, oder kleiner sey, als der andere? Z. B. welcher von diesen zwey Brüchen $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{7}$ ist der größere? Zu diesem Ende darf man nur die beyden Brüche auf gleiche Benennung bringen, da man denn für den erstern $\frac{14}{21}$ und für den andern $\frac{15}{21}$ bekommt, woraus sich offenbar ergiebt, daß $\frac{5}{7}$ größer ist als $\frac{2}{3}$, und zwar um $\frac{1}{21}$. Wenn ferner die Brüche $\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{8}$ gegeben sind, so bekommt man statt deren die Brüche $\frac{24}{40}$ und $\frac{25}{40}$, woraus erhellet, daß $\frac{5}{8}$ mehr sey als $\frac{3}{5}$, aber nur um $\frac{1}{40}$.

§. 99.

Soll ein Bruch von einer ganzen Zahl abgezogen werden, z. B. $\frac{2}{3}$ von 1, so darf man nur $\frac{3}{3}$ statt 1 schreiben, da man denn gleich sieht, daß $\frac{1}{3}$ übrig bleibt. Eben so $\frac{5}{12}$ von 1 abgezogen, giebt $\frac{7}{12}$. Soll man aber $\frac{3}{4}$ von 2 abziehen, so schreibe man für 2 nur 1 und $\frac{4}{4}$, da denn 1 und $\frac{1}{4}$ übrig bleibt. Uebrigens ist bekannt, daß wenn ein Bruch zu einer ganzen Zahl addirt werden soll, man ihn nur geradezu anhängt; als, $\frac{2}{3}$ zu 6 addirt, giebt $6\frac{2}{3}$.

§. 100.

Zuweilen geschieht es auch, daß 2 oder mehr Brüche zusammen addirt, mehr als ein Ganzes ausmachen, welches denn bemerkt werden muß: als $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$, oder $\frac{8}{12}+\frac{9}{12}$ giebt $\frac{17}{12}$, welches gleich ist, $1\frac{5}{12}$. Eben so, wenn mehrere ganze Zahlen und Brüche addirt werden sollen, so addirt man erst die Brüche, und wenn ihre Summe 1 oder mehr Ganze enthält, so werden diese hernach zu den ganzen Zahlen addirt, z. B. wären $3\frac{1}{2}$ und $2\frac{2}{3}$ zu addiren, so machen die Brüche für sich zusammen $\frac{7}{6}$, oder $1\frac{1}{6}$, welches mit den Ganzen zusammen genommen, 6 und $\frac{1}{6}$ ausmacht.

Zusatz. Bey der Rechnung mit Brüchen finden verschiedene Vortheile statt, wovon ich hier nur ein Paar beybringen werde.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{a}{d} = \frac{ad \pm ab}{bd} = \frac{a(d \pm b)}{bd}$$

Wenn also Brüche gleiche Zähler haben, so darf man nur, um sie zu addiren oder zu subtrahiren, die Summe oder Differenz ihrer Nenner mit dem Zähler multipliciren, und das Product mit dem Product der Nenner dividiren.

Statt diese Brüche $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ nach der gewöhnlichen Art zu subtrahiren, verfahre man nach folgender Formel.

$$\frac{a(d-c) - c(b-a)}{bd}$$

Man multiplicirt nemlich den Zähler jedes Bruchs mit der Differenz zwischen Zähler und Nenner des anderen, zieht diese Producte von einander ab, und dividirt, wie gewöhnlich, mit dem Producte den Nenner.

Die Richtigkeit der Formel erhellet, wenn man in der Formel die angezeigte Multiplication wirklich verrichtet. Es entsteht nehmlich $\frac{ad - ac - cb + ac}{bd} = \frac{ad - cb}{bd}$ wie gewöhnlich.
Einen andern Beweis findet man im ersten Theil meiner Sammlung algebraischer Aufgaben in der Einleitung.

Sehr

Sehr brauchbar ist dieser Vortheil, wenn die Brüche sehr groß, und der Zähler also wenig vom Nenner unterschieden sind.

Z. B. $\frac{57}{59} - \frac{29}{31} = \frac{(57 - 29)\,2}{59.\;31} = \frac{28.\;2}{59.\;31.}$; hier ist nehmlich $d - c = b - a$, daher kann man die Formel in diesem Fall noch mehr verkürzen, indem man schreibt $\frac{(a - c)\,(d - c)}{bd}$.

X. Capitel.

Von der Multiplication und Division der Brüche.

§. 101.

Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man damit nur den Zähler, und läßt den Nenner unverändert; z. B.

2 mal $\frac{1}{2}$ macht $\frac{2}{2}$, oder 1 Ganzes;
2 mal $\frac{1}{3}$ macht $\frac{2}{3}$; ferner 3 mal $\frac{1}{6}$ macht $\frac{3}{6}$, oder $\frac{1}{2}$;
4 mal $\frac{5}{12}$ macht $\frac{20}{12}$, oder 1 und $\frac{8}{12}$, oder $1\frac{2}{3}$.

Hieraus ergiebt sich die Regel: daß ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, wenn man entweder den Zähler damit multiplicirt, oder den Nenner durch die ganze Zahl dividirt; geht das letztere an, so wird die Rechnung dadurch um vieles verkurzt. Z. B. es soll $\frac{8}{9}$ mit 3 multiplicirt werden, so kommt $\frac{24}{9}$ heraus, wenn der Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt wird, welches so viel als $\frac{8}{3}$ ist; läßt man aber den Zähler unverändert und dividirt den Nenner 9 durch 3, so bekommt man ebenfalls $\frac{8}{3}$; das ist 2 und $\frac{2}{3}$. Eben so giebt $\frac{13}{24}$ mit 6 multiplicirt $\frac{13}{4}$ oder $3\frac{1}{4}$.

 §. 102.

§. 102.

Wenn also ein Bruch $\frac{a}{b}$ durch c multiplicirt werden soll, so bekommt man $\frac{ac}{b}$. Hierbey ist zu merken, daß, wenn die ganze Zahl gerade dem Nenner gleich ist, alsdann das Product dem Zähler gleich werde, also:

$\frac{1}{2}$ zweymal genommen giebt 1.
$\frac{2}{3}$ mit 3 mult. giebt 2.
$\frac{3}{4}$ mit 4 mult. giebt 3.

und allgemein, wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ mit der Zahl b multiplicirt wird, so ist das Product a, wovon der Grund schon vorher (§. 46) gezeigt worden; denn da $\frac{a}{b}$ den Quotienten ausdrückt, der entsteht, wenn der Dividendus a durch den Divisor b dividirt wird, und zugleich bewiesen ist, daß der Quotient mit dem Divisor multiplicirt, den Dividendus gebe, so folgt hieraus, daß $\frac{a}{b}$ mit b multiplicirt, die Zahl a geben müsse.

§. 103.

Da nun gezeigt ist, wie man einen Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicire; so ist noch nöthig zu zeigen, wie man einen Bruch durch eine ganze Zahl dividiren müsse, ehe die Multiplication eines Bruchs mit einem Bruch gelehrt werden kann. Es ist aber leicht einzusehen, daß wenn man den Bruch $\frac{2}{3}$ durch 2 dividiren soll, $\frac{1}{3}$ heraus komme, eben so wie in dem Fall, da $\frac{6}{7}$ durch 3 getheilt werden sollen, $\frac{2}{7}$ heraus kommen. Hieraus erhellet, daß man nur den Zähler durch die ganze Zahl theilen

müsse,

müsse, da denn der Nenner unverändert bleibt. Also:

$\frac{12}{25}$ durch 2 div. giebt $\frac{6}{25}$, und
$\frac{12}{25}$ durch 3 div. giebt $\frac{4}{25}$, und
$\frac{12}{25}$ durch 4 div. giebt $\frac{3}{25}$ u. s. f.

§. 104.

Es hat dies also keine Schwierigkeit, wenn sich nur der Zähler durch die vorgegebene Zahl theilen läßt: geht dies aber nicht an, so merke man, daß der Bruch in unendlich viele andere Formen verändert werden könne, unter welchen sich gewiß auch solche finden müssen, deren Zähler sich durch die gegebene Zahl theilen lassen. Also wenn $\frac{3}{4}$ durch 2 getheilt werden soll, so verwandle man diesen Bruch in $\frac{6}{8}$, so giebt dies $\frac{3}{8}$, wenn es durch 2 dividirt wird.

Eine allgemeine Regel ist folgende: wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ durch c dividirt werden soll, so verwandle man denselben in $\frac{ac}{bc}$, dessen Zähler a c durch c dividirt a giebt, also ist der gesuchte Quotient $\frac{a}{bc}$.

§. 105.

Hieraus sieht man, daß, wenn ein Bruch, als $\frac{a}{b}$, durch eine ganze Zahl c dividirt werden soll, man nur den Nenner b mit dieser ganzen Zahl zu multipliciren brauche, ohne den Zähler verändern zu lassen. Also, $\frac{5}{8}$ durch 3 dividirt, giebt $\frac{5}{24}$, und $\frac{9}{16}$ durch 5 dividirt, giebt $\frac{9}{80}$. Wenn sich aber der Zähler selbst durch eine ganze Zahl theilen läßt, so wird die Rechnung leichter, z. B. $\frac{9}{16}$ durch 3 getheilt,

theilt, giebt $\frac{3}{16}$. Nach jener Art aber $\frac{9}{48}$, welches so viel als $\frac{3}{16}$ ist. Denn 3 mal 3 ist 9, und 3 mal 16 ist 48.

§. 106.

Nun ist es möglich zu zeigen, wie ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit einem andern Bruch $\frac{c}{d}$ multiplicirt werden soll. Man darf nur bedenken, daß $\frac{c}{d}$ so viel ist als c getheilt durch d: und also darf man nur den Bruch $\frac{a}{b}$ erstlich mit c multipliciren, da denn $\frac{ac}{b}$ heraus kommt; hernach durch d dividiren, da es denn $\frac{ac}{bd}$ giebt; und hieraus folgt die Regel: daß, um zwey Brüche mit einander zu multipliciren, man erst die Zähler, und hernach die Nenner besonders mit einander multipliciren müsse.

Also: $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$ mult. giebt $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$: ferner
$\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{5}$ mult. giebt $\frac{8}{15}$; und
$\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{12}$ mult. giebt $\frac{15}{48}$ oder $\frac{5}{16}$ u. s. f.

§. 107.

Nun ist nur noch übrig zu zeigen, wie ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt werden soll. Hiebey ist erstlich zu merken, daß wenn die Brüche gleiche Nenner haben, die Division nur an den Zählern verrichtet werde: weil z. B. $\frac{3}{12}$ in $\frac{9}{12}$ eben so vielmal enthalten ist, als 3 in 9, das ist 3 mal. Daher wenn $\frac{8}{12}$ durch $\frac{9}{12}$ dividirt werden soll, so darf man nur 8 und 9 dividiren; dies giebt $\frac{8}{9}$. Ferner $\frac{6}{20}$ in $\frac{18}{20}$ ist 3 mal: $\frac{7}{100}$ in $\frac{49}{100}$ ist 7 mal: $\frac{6}{25}$ durch $\frac{7}{25}$ giebt $\frac{6}{7}$: eben so $\frac{3}{7}$ durch $\frac{4}{7}$ giebt $\frac{3}{4}$.

§. 108.

Wenn aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so weiß man, wie dieselben auf gleiche Nenner gebracht werden müssen. Z. B. soll man den Bruch $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ dividiren, und bringt man diese Brüche unter gleiche Benennung, so bekommt man den Bruch $\frac{ad}{bd}$ durch $\frac{bc}{bd}$ zu dividiren, wo denn eben so viel heraus kommen muß, als wenn man den ersten Zähler ad durch den letztern bc dividirt: Folglich wird der gesuchte Quotient seyn $\frac{ad}{bc}$.

Hieraus entspringt diese Regel: man muß den Zähler des Dividendus mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividendus mit dem Zähler des Divisors multipliciren, so wird jenes Product den Zähler, und dieses den Nenner zum Quotienten geben.

§. 109.

Wenn also $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt werden soll, so bekommt man nach dieser Regel $\frac{15}{16}$ zum Quotienten: Wenn ferner $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so giebt es $\frac{6}{4}$ oder $\frac{3}{2}$, das ist $1\frac{1}{2}$. Ferner wenn durch $\frac{5}{6}$ der Bruch $\frac{25}{48}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$.

§. 110.

Man pflegt diese Regel für die Division auch bequemer auf folgende Art vorzutragen: man kehrt den Bruch, durch welchen dividirt werden soll, um, indem man seinen Nenner oben, und seinen Zähler unten

 schreibt,

schreibt, und multiplicirt den Bruch, welcher getheilt werden soll, mit diesem umgekehrten Bruch, so erhält man den gesuchten Quotienten. Also $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt, ist eben so viel als $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{1}$ multiplicirt, woraus entsteht $\frac{6}{4}$ oder $1\frac{1}{2}$. Eben so $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt, ist eben so viel als $\frac{5}{8}$ mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt, welches $\frac{15}{16}$ giebt: ferner $\frac{25}{48}$ durch $\frac{5}{6}$ dividirt, giebt eben so viel als $\frac{25}{48}$ mit $\frac{6}{5}$ multiplicirt, welches $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$ giebt.

Man sieht also überhaupt, daß durch den Bruch $\frac{1}{2}$ dividiren eben so viel ist, als mit $\frac{2}{1}$, das ist mit 2 multipliciren: und durch $\frac{1}{3}$ dividiren, eben so viel, als mit $\frac{3}{1}$, das ist mit 3 multipliciren.

§. 111.

Wenn daher die Zahl 100 durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so giebt es 200; und 1000 durch $\frac{1}{3}$ dividirt, giebt 3000. Wenn ferner 1 durch $\frac{1}{1000}$ dividirt werden soll, so kommt 1000; und 1 durch $\frac{1}{100000}$ dividirt, giebt 100000; woraus sich erklären läßt, daß eine Division, die durch 0 geschiehet, unendlich viel geben müsse, weil, wenn man 1 durch diesen kleinen Bruch $\frac{1}{1000000000}$ dividirt, die große Zahl 1000000000 herauskommt.

§. 112.

Wenn ein Bruch durch sich selbst dividirt werden soll, so versteht sich von selbst, daß der Quotient 1 seyn werde, weil eine jede Zahl durch sich selbst dividirt 1 giebt: eben dieses zeigt auch unsere Regel. Wenn z. B. $\frac{3}{4}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden soll, so multiplicirt man $\frac{3}{4}$ mit $\frac{4}{3}$, da dann $\frac{12}{12}$, das ist 1, herauskommt. Und wenn $\frac{a}{b}$ durch $\frac{a}{b}$ dividirt

werden

werden soll, so multiplicirt man $\frac{a}{b}$ mit $\frac{b}{a}$, wo denn $\frac{ab}{ab}$, das ist 1, heraus kommt.

§. 113.

Es ist jetzt noch übrig, eine Redensart zu erklären, die sehr oft gebraucht wird: z. B. fragt man, was die Hälfte von $\frac{3}{4}$ sey, so heißt das so viel, als man soll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{1}{2}$ multipliciren. Eben so, wenn man fragt, was $\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{8}$ sey, so muß man $\frac{5}{8}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren, da denn $\frac{10}{24}$ heraus kommt; und $\frac{3}{4}$ von $\frac{9}{16}$ ist eben so viel als $\frac{9}{16}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt, welches $\frac{27}{64}$ giebt. Dies ist wohl zu merken, so oft diese Redensart vorkommt.

§. 114.

Endlich ist hier wegen der Zeichen + und — eben das zu bemerken, was oben bey den ganzen Zahlen gesagt worden. Also: $+\frac{1}{2}$ mit $-\frac{1}{3}$ multiplicirt, giebt $-\frac{1}{6}$; und $-\frac{2}{3}$ mit $-\frac{4}{5}$ multiplicirt, giebt $+\frac{8}{15}$. Ferner $-\frac{5}{8}$ durch $+\frac{2}{3}$ dividirt, giebt $-\frac{15}{16}$; und $-\frac{3}{4}$ durch $-\frac{3}{4}$, giebt $+\frac{12}{12}$ oder + 1.

XI. Capitel.

Von den Quadratzahlen.

§. 115.

Wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplicirt, so wird das Product ein Quadrat genannt, so wie in Ansehung dessen die Zahl, daraus es entstanden, seine Quadratwurzel heißt.

Also

Also, wenn man z. B. 12 mit 12 multiplicirt, so ist das Product 144 eine Quadratzahl, deren Wurzel die Zahl 12 ist.

Der Grund dieser Benennung ist aus der Geometrie genommen, wo der Inhalt eines Quadrats, d. i. eines gleichseitigen und rechtwinklichten Vierecks, gefunden wird, wenn man die Seite desselben mit sich selbst multiplicirt.

§. 116.

Daher findet man alle Quadratzahlen durch die Multiplication, wenn man nehmlich die Wurzel mit sich selbst multiplicirt.

Also, weil 1 mit 1 multiplicirt 1 giebt, so ist 1 das Quadrat von 1.

Ferner ist 4 das Quadrat von der Zahl 2; hingegen 2 die Quadratwurzel von 4.

Eben so ist 9 das Quadrat von 3, und 3 die Quadratwurzel von 9. Wir wollen daher die Quadrate der natürlichen Zahlen betrachten, und folgende Tafel hersetzen, in welcher man die Zahlen oder Wurzeln in der ersten, die Quadrate aber in der zweyten Reihe findet.

Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Quad.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289

Anmerk. Wir haben sehr vollständige Tafeln für die Quadrate der natürlichen Zahlen unter dem Titel: Tetragonometria Tabularia &c. auctore I. Jobo Ludolfo. Amstelodami, 1690 4 Diese Tafeln enthalten die Quadrate von allen Zahlen von 1 bis 100000. In der Einleitung werden verschiedene Anwendungen dieser Tafeln gezeigt, unter andern auch die Producte von jeden zwey Factoren zu finden, die kleiner als 100000 sind. Von diesem Werke besitze ich, außer der genannten Ausgabe, noch folgende zwey: Erffordiae 1709 und Jenae 1712.

§. 117.

Bey diesen der Ordnung nach fortschreitenden Quadratzahlen bemerkt man sogleich folgende Eigenschaft, daß, wenn man ein jedes Quadrat von dem folgenden subtrahiret, die Reste in dieser Ordnung fortgehen.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, u. s. f. welche immer um zwey steigen, und alle ungrade Zahlen der Ordnung nach enthalten.

§. 118.

Auf gleiche Weise werden die Quadrate von Brüchen gefunden, wenn man nemlich einen Bruch mit sich selbst multiplicirt. Also ist von $\frac{1}{2}$ das Quadrat $\frac{1}{4}$,

von $\frac{1}{3}$ ist das Quadrat $\frac{1}{9}$,
von $\frac{2}{3}$ — $\frac{4}{9}$,
von $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{16}$,
von $\frac{3}{4}$ — $\frac{9}{16}$ u. s. f.

Man darf nemlich nur das Quadrat des Zählers durch das Quadrat des Nenners dividiren, so bekommt man das Quadrat des Bruchs. Also ist $\frac{25}{64}$ das Quadrat des Bruchs $\frac{5}{8}$ und umgekehrt ist $\frac{5}{8}$ die Wurzel von $\frac{25}{64}$.

§. 119.

Wenn man das Quadrat von einer vermischten Zahl, welche aus einer ganzen Zahl und einem Bruch besteht, finden will, so darf man sie nur zu einem unächten Bruch machen, und das Quadrat davon nehmen. Also um das Quadrat von $2\frac{1}{2}$ zu finden, so ist erstlich $2\frac{1}{2}$ so viel als $\frac{5}{2}$, und folglich das Quadrat $\frac{25}{4}$, welches $6\frac{1}{4}$ beträgt. Also ist $6\frac{1}{4}$ das Quadrat von $2\frac{1}{2}$. Eben so um das Quadrat

von $3\frac{1}{4}$ zu finden, so bemerke man, daß $3\frac{1}{4}$ so viel ist als $\frac{13}{4}$, wovon das Quadrat $\frac{169}{16}$ ist, welches 10 und $\frac{9}{16}$ ausmacht. Wir wollen z. B. die Quadrate der Zahlen, welche von 3 bis 4 um ein Viertel steigen, betrachten, als:

Zahlen	3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
Quadr.	9	$10\frac{9}{16}$	$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{16}$	16

Woraus man leicht abnehmen kann, daß, wenn die Wurzel einen Bruch enthält, das Quadrat derselben auch immer einen Bruch enthalte. Also wenn die Wurzel ist $1\frac{5}{12}$, so wird das Quadrat derselben gefunden $\frac{289}{144}$, welches $2\frac{1}{144}$, und also nur um sehr wenig größer als 2 ist.

§. 120.

Auf eine allgemeine Art, wenn die Wurzel a ist, so ist das Quadrat aa: ferner von der Wurzel $2a$ ist das Quadrat $4aa$. Hieraus sieht man, daß, wenn die Wurzel 2 mal so groß genommen wird, das Quadrat 4 mal größer werde. Ferner ist von der Wurzel $3a$ das Quadrat $9aa$, und von der Wurzel $4a$ ist das Quadrat $16aa$ u. s. f. Heißt aber die Wurzel ab, so ist ihr Quadrat $aabb$, und wenn abc die Wurzel ist, so ist ihr Quadrat $aabbcc$.

§. 121.

Wenn daher die Wurzel aus 2 oder mehrern Factoren besteht, so muß man die Quadrate derselben mit einander multipliciren, und umgekehrt, wenn das Quadrat aus 2 oder mehrern Factoren besteht, deren jeder ein Quadrat ist, so braucht man nur die Wurzeln derselben mit einander zu multipliciren. Also da 2304 so viel ist, als 4. 16. 36; so

ist

ist die Quadratwurzel davon 2. 4. 6, das ist 48, und in der That ist 48 die Quadratwurzel von 2304, weil 48. 48 eben so viel ausmacht, als 2304.

§. 122.

Nun ist noch nöthig zu zeigen, was es mit den Zeichen plus und minus bey den Quadraten für eine Bewandniß habe. Es erhellet sogleich, daß, wenn die Wurzel das Zeichen + hat, oder eine positive Zahl ist, dergleichen wir bisher angenommen haben, das Quadrat derselben auch eine positive Zahl seyn müsse, weil + mit + multiplicirt + giebt. Also wird das Quadrat von + a seyn + aa. Wenn aber die Wurzel eine negative Zahl ist, als — a, so wird ihr Quadrat seyn + aa, eben so, als wenn die Wurzel + a wäre; folglich ist + aa eben so wohl das Quadrat von + a als von — a; und man kann daher von einem jeden Quadrat zwey Quadratwurzeln angeben, deren eine positiv, die andere negativ ist. Also ist die Quadratwurzel von 25 so wohl + 5, als — 5, weil + 5 mit + 5 multiplicirt, und auch — 5 mit — 5 multiplicirt + 25 giebt.

XII. Capitel.

Von den Quadratwurzeln und den daraus entstehenden Irrationalzahlen.

§. 123.

Aus dem vorhergehenden erhellt, daß die Quadratwurzel einer gegebenen Zahl nichts anders sey, als eine solche Zahl, deren Quadrat der gegebenen Zahl gleich ist. Also die Quadratwurzel von 4 ist 2, von

9 ist

9 ist sie 3, von 16 ist sie 4, u. s. f. wobey man bemerken muß, daß diese Wurzeln so wohl mit dem Zeichen plus als minus gesetzt werden können. Also von der Zahl 25 ist die Quadratwurzel so wohl $+5$, als -5, weil -5 mit -5 multiplicirt, eben so wohl $+25$ ausmacht, als $+5$ mit $+5$ multiplicirt.

§. 124.

Wenn daher die gegebene Zahl ein Quadrat ist, und man die Quadratzahlen so weit im Gedächtniß hat, so ist es leicht die Quadratwurzel zu finden: z. B. wäre die Zahl 196 gegeben, so weiß man, daß die Quadratwurzel davon 14 ist. Mit den Brüchen verhält es sich eben so, und aus dem obigen ist klar, daß von dem Bruch $\frac{25}{49}$ die Quadratwurzel $\frac{5}{7}$ sey, weil man nur so wohl vom Zähler, als vom Nenner die Quadratwurzel nehmen darf. Ist die gegebene Zahl eine vermischte Zahl, als $12\frac{1}{4}$, so bringe man sie auf einen einzelnen Bruch, nemlich $\frac{49}{4}$, wovon die Quadratwurzel $\frac{7}{2}$, oder $3\frac{1}{2}$ ist. Dies ist also offenbar die Quadratwurzel von $12\frac{1}{4}$.

§. 125.

Ist aber die gegebene Zahl kein Quadrat, als z. B. 12, so ist es auch nicht möglich die Quadratwurzel davon, das ist eine solche Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt, gerade 12 ausmache, zu finden oder anzugeben. Indessen wissen wir doch, daß die Quadratwurzel von 12 größer ist als 3, weil $3 \cdot 3$ nur 9 macht, doch aber kleiner als 4, weil $4 \cdot 4$ schon 16 macht; man weiß auch, daß sie kleiner seyn müsse, als $3\frac{1}{2}$, weil das Quadrat von $3\frac{1}{2}$ mehr ist als 12, denn $3\frac{1}{2}$ ist $\frac{7}{2}$, und dessen Quadrat $\frac{49}{4}$ oder $12\frac{1}{4}$. Diese Wurzel läßt sich sogar noch näher bestimmen durch $3\frac{7}{15}$, denn das Quadrat von

$3\frac{7}{15}$ oder $\frac{52}{15}$ macht $\frac{2704}{225}$; folglich ist $3\frac{7}{15}$ noch um etwas zu groß, denn $\frac{2704}{225}$ ist um $\frac{4}{225}$ größer als 12.

§. 126.

Da nun $3\frac{1}{2}$ und auch $3\frac{7}{15}$ um etwas größer ist als die Quadratwurzel von 12, so könnte man glauben, daß, wenn man statt des Bruchs $\frac{7}{15}$ einen etwas kleinern zu 3 addirte, das Quadrat davon genau 12 werden könnte.

Man nehme also $3\frac{3}{7}$, weil $\frac{3}{7}$ um etwas weniges kleiner ist als $\frac{7}{15}$. Nun ist $3\frac{3}{7}$ so viel als $\frac{24}{7}$, wovon das Quadrat $\frac{576}{49}$, und also kleiner ist als 12. Denn 12 beträgt $\frac{588}{49}$, also $\frac{12}{49}$ mehr. Hieraus sieht man also, daß $3\frac{3}{7}$ zu klein, $3\frac{7}{15}$ aber zu groß ist. Man könnte also $3\frac{5}{11}$ annehmen, weil $\frac{5}{11}$ größer ist als $\frac{3}{7}$ und doch kleiner als $\frac{7}{15}$. Da nun $3\frac{5}{11}$, in einen Bruch gebracht, $\frac{38}{11}$ sind, so ist das Quadrat davon $\frac{1444}{121}$. Aber 12 auf diesen Nenner gebracht, giebt $\frac{1452}{121}$, woraus erhellet, daß $3\frac{5}{11}$ noch zu klein ist und zwar nur um $\frac{8}{121}$. Wollte man nun setzen, die Wurzel wäre $3\frac{6}{13}$, weil $\frac{6}{13}$ etwas größer ist als $\frac{5}{11}$, so wäre das Quadrat davon $\frac{2025}{169}$; aber 12 auf gleichen Nenner gebracht, giebt $\frac{2028}{169}$. Also ist $3\frac{6}{13}$ noch zu klein, aber nur um $\frac{3}{169}$, da doch $3\frac{7}{15}$ zu groß ist.

§. 127.

Es läßt sich aber leicht begreifen, daß, was man auch immer für einen Bruch zu 3 hinzusetzen mag, das Quadrat davon jedesmal einen Bruch in sich fassen müsse, und also niemals genau 12 betragen könne. Also, ungeachtet wir wissen, daß die Quadratwurzel von 12 größer ist als $3\frac{6}{13}$, aber kleiner als $3\frac{7}{15}$, so muß man doch gestehen, daß es nicht möglich sey, zwischen diesen zwey Brüchen einen

solchen ausfindig zu machen, welcher zu 3 addirt, die Quadratwurzel von 12 genau ausdrückte. Inzwischen läßt sich doch nicht behaupten, daß die Quadratwurzel von 12 an und für sich selbst unbestimmt wäre, sondern es folgt aus dem angeführten nur so viel, daß diese Zahl durch Brüche nicht ausgedrückt werden kann, ungeachtet sie nothwendig eine bestimmte Größe haben muß.

§. 128.

Dies leitet auf eine neue Art von Zahlen, welche sich keinesweges durch Brüche ausdrücken lassen und gleichwohl eine bestimmte Größe haben, wie wir von der Quadratwurzel der Zahl 12 sehen. Diese neue Art von Zahlen werden nun Irrationalzahlen genannt, und sie entstehen, so oft man die Quadratwurzel aus einer Zahl suchen soll, welche kein Quadrat ist. Also weil 2 kein Quadrat ist, so ist auch die Quadratwurzel aus 2, oder diejenige Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt, genau 2 hervorbringt, eine Irrationalzahl. Zuweilen pflegt man solche Zahlen auch surdische zu nennen.

§. 129.

Ungeachtet sich nun solche Irrationalzahlen durch keinen Bruch darstellen lassen, so haben wir doch einen deutlichen Begriff von der Größe derselben. Denn z. B. die Quadratwurzel aus 12 mag auch immer noch so verborgen scheinen, so ist doch bekannt, daß sie eine solche Zahl ist, welche mit sich selbst multiplicirt, gerade 12 hervorbringt. Und diese Eigenschaft ist hinlänglich, einen deutlichen Begriff von dieser Zahl zu geben, besonders da man immer näher zu dem Werth derselben gelangen kann.

§. 130.

§. 130.

Weil wir nun einen hinlänglichen Begriff von dergleichen Irrationalzahlen haben, so bedient man sich eines gewissen Zeichens, um die Quadratwurzel solcher Zahlen, die keine Quadrate sind, anzudeuten. Dieses Zeichen hat diese Figur $\sqrt{}$, und wird mit dem Wort Quadratwurzel ausgesprochen. Also $\sqrt{12}$ bedeutet diejenige Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt 12 giebt, oder mit einem Wort die Quadratwurzel aus 12. Eben so bedeutet $\sqrt{2}$ die Quadratwurzel aus 2, $\sqrt{3}$ die Quadratwurzel aus 3: ferner $\sqrt{\frac{2}{3}}$ die Quadratwurzel aus $\frac{2}{3}$, und überhaupt $\sqrt{a}$, die Quadratwurzel aus der Zahl a. So oft man also aus einer Zahl, welche kein Quadrat ist, die Quadratwurzel anzeigen soll, so bedient man sich dieses Zeichens $\sqrt{}$, welches vor jene Zahl geschrieben wird.

§. 131.

Der jetzt erklärte Begriff von den Irrationalzahlen führt nun sogleich auf einen Weg, die gewöhnlichen Rechnungen damit anzustellen. Weil nemlich die Quadratwurzel aus 2 mit sich selbst multiplicirt 2 geben muß, so wissen wir, daß, wenn $\sqrt{2}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt wird, nothwendig 2 heraus komme: eben so giebt $\sqrt{3}$ mit $\sqrt{3}$ multiplicirt 3; und $\sqrt{5}$ mit $\sqrt{5}$, 5; imgleichen $\sqrt{\frac{2}{3}}$ mit $\sqrt{\frac{2}{3}}$ giebt $\frac{2}{3}$; und überhaupt $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$ multiplicirt, giebt a.

§. 132.

Wenn aber $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt werden soll, so ist das Product $\sqrt{ab}$, weil oben gezeigt ist (§. 121), daß, wenn ein Quadrat Factoren hat, die Wurzel davon auch aus den Wurzeln der Factoren entsteht.

entsteht. Daher findet man die Quadratwurzel aus dem Product ab, das ist $\sqrt{ab}$, wenn man die Quadratwurzel von a, das ist $\sqrt{a}$ mit der Quadratwurzel von b, das ist $\sqrt{b}$, multiplicirt. Hieraus erhellet sogleich, daß wenn b gleich a wäre, alsdenn $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt, $\sqrt{aa}$ gäbe. Nun aber ist $\sqrt{aa}$ offenbar a, weil aa das Quadrat von a ist.

§. 133.

Eben so, wenn $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt werden soll, so bekömmt man $\sqrt{\frac{a}{b}}$, wobey es möglich ist, daß im Quotienten die Irrationalität verschwindet. Also wenn $\sqrt{18}$ durch $\sqrt{8}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\sqrt{\frac{18}{8}}$. Es ist aber $\frac{18}{8}$ so viel als $\frac{9}{4}$ und die Quadratwurzel von $\frac{9}{4}$ ist $\frac{3}{2}$.

§. 134.

Wenn die Zahl, vor welche das Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$ gesetzt wird, selbst ein Quadrat ist, so läßt sich die Wurzel davon auf die gewöhnliche Art ausdrükken. Also ist $\sqrt{4}$ so viel als 2; $\sqrt{9}$ ist 3; $\sqrt{36}$ ist 6; und $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ ist $\sqrt{\frac{49}{4}}$: das ist $\frac{7}{2}$ oder $3\frac{1}{2}$. In diesen Fällen ist daher die Irrationalität nur scheinbar, und fällt von selbst weg.

§. 135.

Es ist auch leicht, solche Irrationalzahlen mit gewöhnlichen Zahlen zu multipliciren. Also ist 2 mal $\sqrt{5}$ so viel als $2\sqrt{5}$; und $\sqrt{2}$ mit 3 multiplicirt, giebt $3\sqrt{2}$; weil aber 3 so viel ist als $\sqrt{9}$, so giebt auch $\sqrt{9}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt, folgende Form, nemlich $\sqrt{18}$, so daß $\sqrt{18}$ eben so viel ist, als $3\sqrt{2}$. Eben so ist $2\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{4a}$, und

und $3\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{9a}$. Und auf eine allgemeine Art ist $b\sqrt{a}$ so viel als die Quadratwurzel aus bba oder $\sqrt{abb}$; woraus man sieht, daß, wenn die Zahl, die hinter dem Zeichen steht, ein Quadrat in sich enthält, die Wurzel davon vor das Zeichen gesetzt werden kann; als $b\sqrt{a}$ anstatt $\sqrt{bba}$. Hieraus werden folgende Reductionen klar seyn:

$\sqrt{8}$, oder $\sqrt{2 \cdot 4}$, ist so viel als $2\sqrt{2}$.
$\sqrt{12}$, oder $\sqrt{3 \cdot 4}$, — — — $2\sqrt{3}$.
$\sqrt{18}$, oder $\sqrt{2 \cdot 9}$, — — — $3\sqrt{2}$.
$\sqrt{24}$, oder $\sqrt{6 \cdot 4}$, — — — $2\sqrt{6}$.
$\sqrt{32}$, oder $\sqrt{2 \cdot 16}$, — — — $4\sqrt{2}$.
$\sqrt{75}$, oder $\sqrt{3 \cdot 25}$, — — — $5\sqrt{3}$. u. s. f.

§. 136.

Mit der Division hat es gleiche Bewandniß: $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt, giebt $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, das ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Auf eben diese Weise ist $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ so viel als $\sqrt{\frac{8}{2}}$, oder $\sqrt{4}$, oder 2.

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ ist $\sqrt{\frac{18}{2}}$, oder $\sqrt{9}$, oder 3.

$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ ist $\sqrt{\frac{12}{3}}$, oder $\sqrt{4}$, oder 2.

$\frac{2}{\sqrt{2}}$ ist $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}$, oder $\sqrt{\frac{4}{2}}$, oder $\sqrt{2}$.

$\frac{3}{\sqrt{3}}$ ist $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$, oder $\sqrt{\frac{9}{3}}$, oder $\sqrt{3}$.

$\frac{12}{\sqrt{6}}$ ist $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{6}}$, oder $\sqrt{\frac{144}{6}}$, oder $\sqrt{24}$, oder $\sqrt{6 \cdot 4}$, das ist $2\sqrt{6}$.

§. 137.

Bey der Addition und Subtraction ist nichts besonders zu erinnern, weil die Zahlen nur mit plus und minus verbunden werden. Als: $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{3}$ addirt, giebt $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; und $\sqrt{3}$ von $\sqrt{5}$ abgezogen, giebt $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

§. 138.

Endlich ist noch zu merken, daß man zum Unterschied dieser sogenannten Irrationalzahlen, die gewöhnlichen Zahlen, sowohl Ganze als Brüche, Rationalzahlen zu nennen pflegt.

Wenn also von Rationalzahlen die Rede ist, so werden darunter jedesmal ganze Zahlen, oder auch Brüche, die sich genau angeben lassen, verstanden, dergleichen z. B. die Quadratwurzel aus 16, aus 25 und aus $13\frac{4}{9}$ ist.

XIII. Capitel.

Von den aus eben dieser Quelle entspringenden unmöglichen oder imaginären Zahlen.

§. 139.

Wir haben schon oben (§. 122) gesehen, daß die Quadrate sowohl der positiven als negativen Zahlen immer positiv sind, oder mit dem Zeichen plus heraus kommen; indem $-a$ mit $-a$ multiplicirt eben sowohl $+aa$ giebt, als wenn man $+a$ mit $+a$ mutiplicirt. Und daher sind in dem vorigen Capitel alle Zahlen, woraus die Quadratwurzeln gezogen werden sollen, als positiv angenommen worden.

§. 140.

§. 140.

Wenn daher aus einer negativen Zahl die Quadratwurzel gezogen werden soll, so ist man allerdings in einer großen Verlegenheit, weil sich keine Zahl angeben läßt, deren Quadrat eine negative Zahl wäre. Denn wenn man z. B. die Quadratwurzel von der Zahl — 4 verlangt, so will man eine solche Zahl haben, welche mit sich selbst multiplicirt — 4 gebe. Diese gesuchte Zahl ist aber weder + 2 noch — 2, indem sowohl + 2 als — 2, mit sich selbst multiplicirt allemal + 4 giebt, und nicht — 4.

§. 141.

Hieraus erkennt man also, daß die Quadratwurzel von einer negativen Zahl weder eine positive, noch negative Zahl seyn könne, weil auch von allen negativen Zahlen die Quadrate positiv werden, oder das Zeichen + bekommen; folglich muß die verlangte Wurzel von einer ganz besondern Art seyn, indem dieselbe weder zu den positiven, noch negativen Zahlen gerechnet werden kann.

§. 142.

Da nun oben (§. 19) schon angemerkt ist, daß die positiven Zahlen alle größer sind, als nichts oder 0: die negativen Zahlen hingegen alle kleiner, als nichts, oder 0; also, daß alles, was größer ist als nichts, durch positive Zahlen; hingegen alles, was kleiner ist als nichts, durch negative Zahlen ausgedrückt wird: so sieht man, daß die Quadratwurzel aus negativen Zahlen weder größer noch kleiner als nichts sind. Nichts sind sie aber doch auch nicht, weil 0 mit 0 multiplicirt 0, und also keine negative Zahl giebt.

§. 143.

Weil nun alle mögliche Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner als o, oder o selbst sind; so ist klar, daß die Quadratwurzel von negativen Zahlen nicht einmal unter die möglichen Zahlen gerechnet werden kann. Folglich muß man behaupten, daß sie unmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach unmöglich sind, und gewöhnlich imaginäre oder eingebildete Zahlen genannt werden, weil sie bloß in der Einbildung statt finden.

§. 144.

Daher bedeuten alle diese Ausdrücke: $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, u. s. f. solche unmögliche oder imaginäre Zahlen, weil dadurch Quadratwurzeln von negativen Zahlen angezeigt werden.

Von diesen kann man also mit allem Recht behaupten, daß sie weder größer noch kleiner als nichts, und auch nicht einmal nichts selbst sind, folglich müssen sie aus diesem Grunde für unmöglich gehalten werden.

§. 145.

Gleichwohl aber stellen sie sich unserm Verstande dar, und finden in unserer Einbildung statt; daher sie auch bloß eingebildete Zahlen genannt werden. Ungeachtet aber diese Zahlen, als z. B. $\sqrt{-4}$, ihrer Natur nach ganz und gar unmöglich sind, so haben wir doch davon einen hinlänglichen Begriff, indem wir wissen, daß dadurch eine solche Zahl angedeutet werde, welche mit sich selbst multiplicirt, zum Product -4 hervorbringe; und dieser Begriff

ist hinreichend, um diese Zahlen in der Rechnung gehörig zu behandeln.

§. 146.

Dasjenige nun, was wir zu allererst von dergleichen unmöglichen Zahlen, als z. B. von $\sqrt{-3}$, wissen, besteht darin, daß das Quadrat davon, oder das Product, welches herauskommt, wenn $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt wird, -3 giebt. Eben so ist $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-1}$, mult. -1. Und überhaupt, wenn man $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt, oder das Quadrat von $\sqrt{-a}$ nimmt, so giebt es $-a$.

§. 147.

Da $-a$ so viel ist, als $+a$ mit -1 multiplicirt, und die Quadratwurzel aus einem Product gefunden wird, wenn man die Quadratwurzeln aus den Factoren mit einander multiplicirt (§. 121), so ist die Wurzel aus a mal -1 oder $\sqrt{-a}$ so viel, als $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt. Nun aber ist $\sqrt{a}$ eine mögliche Zahl, folglich läßt sich das Unmögliche, welches darin vorkommt, allezeit auf $\sqrt{-1}$ bringen. Aus diesem Grunde ist also $\sqrt{-4}$ so viel als $\sqrt{4}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt: $\sqrt{4}$ aber ist 2, also ist $\sqrt{-4}$ so viel als $2\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-9}$ so viel als $\sqrt{9}$ mal $\sqrt{-1}$, das ist $3\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-16}$ so viel als $4\sqrt{-1}$.

§. 148.

Da ferner $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt, $\sqrt{ab}$ giebt, so wird $\sqrt{-2}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt, $\sqrt{6}$ geben. Eben so wird $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-4}$ multiplicirt $\sqrt{4}$, das ist 2 geben. Hieraus sieht man, daß zwey unmögliche Zahlen mit

einander multiplicirt, eine mögliche oder wirkliche Zahl hervorbringen.

Wenn aber $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{+5}$, multiplicirt wird, so bekommt man $\sqrt{-15}$. Oder eine mögliche Zahl mit einer unmöglichen multiplicirt, giebt allezeit etwas unmögliches.

Zusatz. $\sqrt{-a} . \sqrt{-b} = \sqrt{-a . -b} = \sqrt{ab}$; welches auch so bewiesen werden kann:

$\sqrt{-a} . \sqrt{-b} = \sqrt{a} . \sqrt{-1} . \sqrt{b} . \sqrt{-1} = \sqrt{a} . \sqrt{b} . \sqrt{-1} . \sqrt{-1} = \sqrt{ab} . -1 = -1 . \sqrt{ab} = -\sqrt{ab}$. Vorhin fanden wir $\sqrt{ab}$, und es kann einen Anfänger sehr ungewiß machen, welches von beyden Resultaten er als richtig anerkennen soll, da doch nur eines davon richtig seyn kann. Folgende Betrachtung wird ihm darüber allen Zweifel benehmen.

$\sqrt{ab}$ kann sowohl positiv als negativ seyn (§. 122). Es frägt sich also nur, welcher Fall hier statt finden muß, und dieses entscheidet der zweyte Beweis, der ganz bestimmt $\sqrt{-a} . \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$ giebt, welches allerdings eine mögliche Größe ist.

$\sqrt{-a} . \sqrt{b} = \sqrt{-ab} = \sqrt{-1 . ab} = \sqrt{ab} . \sqrt{-1}$ oder auch so:

$\sqrt{-a} . \sqrt{b} = \sqrt{a} \; \sqrt{-1} . \sqrt{b} = \sqrt{ab} . \sqrt{-1}$, welches eine unmögliche Größe ist.

§. 149.

Eben so verhält es sich auch mit der Division. Denn da $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt $\sqrt{\frac{a}{b}}$ giebt, so wird $\sqrt{-4}$ durch $\sqrt{-1}$ dividirt $\sqrt{+4}$ geben, und $\sqrt{+3}$ durch $\sqrt{-3}$ dividirt wird geben $\sqrt{-1}$: Ferner 1 durch $\sqrt{-1}$ dividirt, giebt $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$ das ist $\sqrt{-1}$, weil 1 soviel ist, als $\sqrt{+1}$.

Zusatz.

Zusatz. Da $(\pm\sqrt{-1}).(\pm\sqrt{-1}) = -1$, so ist

$$(\mp\sqrt{-1}.)(\pm\sqrt{-1}) = +1,$$

also $\mp\sqrt{-1} = \frac{1}{\pm\sqrt{-1}}$.

woraus man deutlich sieht, daß

$$\frac{1}{+\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$$

und $\frac{1}{-\sqrt{-1}} = +\sqrt{-1}$

Wer nun bloß $\sqrt{-1}$ schreibt, will offenbar dadurch anzeigen, daß er diese Wurzel positiv nimmt, daher ist es bey Euler falsch, wenn $\frac{1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$ gesetzt wird.

Es erhellet auch schon sehr leicht aus folgenden Schlüssen:

$$\sqrt{-1}.\ \sqrt{-1} = -1,$$

folglich $\sqrt{-1} = \frac{-1}{\sqrt{-1}}$ oder $-\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$

Euler schließt so:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{+1}.}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{+1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$$

Aber bey diesen Schlüssen bleibt man ungewiß, ob die Wurzel positiv oder negativ genommen werden muß, indem Euler mit eben dem Rechte die $\sqrt{+1} = -1$ nehmen könnte.

Anfänger mögen aus diesen Erinnerungen sehen, daß sie selbst die Schriften eines so großen Mathematikers, wie Euler war, mit Vorsicht lesen müssen.

$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a}.\ \sqrt{-1}}{\sqrt{b}.\ \sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$. Mehrere Exempel zur Uebung werden unten vorkommen.

§. 150.

Wie aber jene Anmerkung (§. 122) allezeit statt findet, daß die Quadratwurzel aus einer jeden Zahl immer einen doppelten Werth hat, oder sowohl negativ als positiv genommen werden kann, indem z. B. $\sqrt{4}$ sowohl $+2$ als -2 ist, und überhaupt für die Quadratwurzel aus a sowohl $+\sqrt{a}$ als $-\sqrt{a}$,

$\sqrt{a}$, geschrieben werden kann, so gilt dies auch bey den unmöglichen Zahlen; und die Quadratwurzel aus $-a$ ist sowohl $+\sqrt{-a}$, als $-\sqrt{-a}$, wobey man die Zeichen $+$ und $-$ welche vor dem $\sqrt{}$ Zeichen gesetzt werden, von dem Zeichen, welches hinter dem $\sqrt{}$ Zeichen steht, wohl unterscheiden muß.

§. 151.

Endlich muß noch der Zweifel gehoben werden, daß, da dergleichen Zahlen unmöglich sind, dieselben auch ganz und gar keinen Nutzen zu haben scheinen und diese Lehre als eine bloße Grille angesehen werden könnte. Allein sie ist in der That von der größten Wichtigkeit, indem oft Fragen vorkommen, von welchen man sogleich nicht wissen kann, ob sie möglich sind oder nicht. Wenn nun ihre Auflösung auf solche unmögliche Zahlen führt, so ist es ein sicheres Zeichen, daß die Frage selbst unmöglich sey. Um dieses mit einem Beispiel zu erläutern, so wollen wir folgende Frage betrachten: man soll die Zahl 12 in zwey solche Theile zerlegen, deren Product 40 ausmache; wenn man nun diese Frage nach den Regeln auflöset, so findet man für die zwey gesuchten Theile $6+\sqrt{-4}$, und $6-\sqrt{-4}$, welche folglich unmöglich sind, und hieraus eben erkennt man, daß diese Frage sich durchaus nicht auflösen läßt. Wollte man aber die Zahl 12 in zwey solche Theile zerfällen, deren Product 35 wäre, so ist offenbar, daß diese Theile 7 und 5 seyn würden.

XIV. Capitel.

Von den Cubiczahlen.

§. 152.

Wenn eine Zahl dreymal mit sich selbst, oder ihr Quadrat nochmal mit derselben Zahl multiplicirt wird, so wird das Product ein Cubus oder eine Cubiczahl genannt. Also ist von der Zahl a der Cubus aaa, welcher entsteht, wenn die Zahl a mit sich selbst, nemlich mit a, und das Quadrat derselben aa nochmals mit der Zahl a multiplicirt wird.

Also sind die Cubi der natürlichen Zahlen folgende:

Zahlen	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Cubi	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000

Anmerk. Die vollständigsten Cubictafeln, die ich kenne, verdanken wir einem Mathematiker, *I. Paul Büchner*, Nürnberg 1701. In diesen Tafeln finden sich alle Quadrat- und Cubiczahlen von 1 bis 12000, allein sie sind wegen ihrer Unrichtigkeiten sehr unsicher zu gebrauchen. Herr Prof. Hindenburg hat uns schon längst dergleichen Tafeln versprochen, die nach seinen Erfindungen mit einer bewunderungswürdigen Geschwindigkeit und Richtigkeit unter der Aufsicht des Herrn von Schönberg bereits berechnet seyn sollen.

§. 153.

Wenn man bey diesen Cubiczahlen ihre Differenzen, wie solches bey den Quadratzahlen geschehen, in Betrachtung zieht, indem man eine jede von der folgenden subtrahirt, so bekommt man folgende Reihe von Zahlen, wobey sich noch keine Ordnung bemerken läßt,

7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271;

wenn man aber von denselben noch ferner die Differenzen nimmt, so erhält man folgende Reihe Zahlen, welche offenbar immer um 6 steigen, als:

12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54.

§. 154.

Auf diese Art wird man auch leicht die Cubiczahlen von Brüchen finden können: also ist von $\frac{1}{2}$ der Cubus $\frac{1}{8}$, von $\frac{1}{3}$ ist er $\frac{1}{27}$, von $\frac{2}{3}$ ist er $\frac{8}{27}$. Man darf nemlich nur besonders vom Zähler und Nenner die Cubiczahl nehmen. Also vom Bruch $\frac{3}{4}$ wird der Cubus seyn $\frac{27}{64}$.

§. 155.

Wenn von einer vermischten Zahl der Cubus gefunden werden soll, so muß dieselbe erstlich in einen einzelnen gleichgeltenden Bruch verwandelt werden, da denn die Rechnung leicht angestellt wird. Also von der Zahl $1\frac{1}{2}$ wird es leicht seyn den Cubus zu finden: denn da $1\frac{1}{2}$ zu einem einzelnen Bruch gebracht $\frac{3}{2}$ ist, so wird der Cubus von $\frac{3}{2}$ seyn $\frac{27}{8}$, das ist 3 und $\frac{3}{8}$. Eben so von der Zahl $1\frac{1}{4}$ oder $\frac{5}{4}$ ist der Cubus $\frac{125}{64}$, das ist 1 und $\frac{61}{64}$. Ferner von der Zahl $3\frac{1}{4}$ oder $\frac{13}{4}$ ist der Cubus $\frac{2197}{64}$, welches giebt $34\frac{21}{64}$.

§. 156.

Da von der Zahl a der Cubus aaa ist, so wird von der Zahl ab der Cubus seyn aaabbb; woraus man sieht, daß, wenn die Zahl zwey oder mehr Factoren hat, der Cubus davon gefunden werde, wenn man die Cubiczahlen von allen Factoren mit einander multiplicirt. Also z. B.: weil 12 so viel ist als 3.4, so multiplicirt man den Cubus von 3, welcher 27 ist,

27 ist, mit dem Cubus von 4, nehmlich 64, und so bekommt man 1728, und dieses ist der Cubus von 12. Hieraus ist ferner klar, daß der Cubus von 2a ist 8aaa, und also 8 mal größer, als der Cubus von a; eben so ist von 3a der Cubus 27aaa, und also 27 mal größer, als der Cubus von a.

§. 157.

Betrachtet man nun auch hier die Zeichen + und —, so ist für sich klar, daß von einer positiven Zahl + a der Cubus + aaa und folglich auch positiv seyn müsse. Wenn aber von einer negativen Zahl, als — a, der Cubus genommen werden soll, so nehme man erstlich das Quadrat, welches ist + aa, und da solches nochmals mit — a multiplicirt werden soll, so wird der gesuchte Cubus — aaa und folglich auch negativ seyn. Daher es mit den Cubis eine ganz andere Bewandniß hat als mit den Quadraten, welche allezeit positiv herauskommen. Also ist von — 1, der Cubus — 1, von — 2, der Cubus — 8; von — 3, ist er — 27, u. s. f.

XV. Capitel.

Von den Cubicwurzeln und den daher entspringenden Irrationalzahlen.

§. 158.

Da vorher gezeigt worden, wie von einer gegebenen Zahl der Cubus gefunden werden soll, so kann auch umgekehrt aus einer gegebenen Zahl diejenige Zahl gefunden werden, welche dreymal mit sich selbst multipli-

tiplicirt dieselbe Zahl hervorbringe: und diese wird in Ansehung jener ihre **Cubicwurzel** genannt. Also ist die Cubicwurzel aus einer gegebenen Zahl eine solche Zahl, deren Cubus der gegebenen Zahl gleich ist.

§. 159.

Wenn also die gegebene Zahl eine wirkliche Cubiczahl ist, dergleichen im obigen Capitel gefunden, so ist es leicht, die Cubicwurzel davon zu finden. Also ist von 1 die Cubicwurzel 1; von 8 ist sie 2; von 27 ist sie 3; von 64 ist sie 4, u. s. w.

Eben so ist auch von — 27 die Cubicwurzel — 3; von — 125 ist sie — 5. Wenn die Zahl gebrochen ist, so ist von $\frac{8}{27}$ die Cubicwurzel $\frac{2}{3}$, und von $\frac{64}{343}$ ist sie $\frac{4}{7}$. Ferner wenn es eine vermischte Zahl ist, als $2\frac{10}{27}$, welche in einem einzelnen Bruch $\frac{64}{27}$ beträgt, so ist die Cubicwurzel davon $\frac{4}{3}$, das ist $1\frac{1}{3}$.

§. 160.

Wenn aber die gegebene Zahl kein wirklicher Cubus ist, so läßt sich auch die Cubicwurzel davon weder durch ganze noch gebrochene Zahlen ausdrücken. Also da 43 keine Cubiczahl ist, so kann unmöglich weder in ganzen Zahlen noch in Brüchen eine Zahl angezeigt werden, deren Cubus genau 43 ausmache. Inzwischen aber ist doch so viel bekannt, daß die Cubicwurzel davon größer sey, als 3, weil der Cubus davon nur 27 ausmacht, und doch kleiner als 4, weil der Cubus davon schon 64 ist. Folglich muß die verlangte Cubicwurzel zwischen den Zahlen 3 und 4 enthalten seyn.

§. 161.

Wollte man nun zu 3, weil die Cubicwurzel aus 43 größer ist als 3, noch einen Bruch hinzusetzen,

setzen, so könnte man der Wahrheit zwar näher kommen, da aber doch der Cubus davon immer einen Bruch enthalten würde, so kann derselbe niemals genau 43 werden. Man setze z. B. die gesuchte Cubicwurzel wäre $3\frac{1}{2}$ oder $\frac{7}{2}$, so würde der Cubus davon seyn $\frac{343}{8}$ oder $42\frac{7}{8}$, folglich nur um $\frac{1}{8}$ kleiner als 43.

§. 162.

Dies beweiset also deutlich, daß sich die Cubicwurzel aus 43 auf keinerley Weise durch ganze Zahlen und Brüche ausdrücken lasse; da wir aber gleichwohl einen deutlichen Begriff von der Größe derselben haben, so bedient man sich, um dieselbe anzuzeigen, des bey den Quadratwurzeln üblichen Zeichens, in welches man aber, um die Cubicwurzel von der Quadratwurzel zu unterscheiden, die Ziffer 3 zu setzen pflegt. Also bedeutet $\sqrt[3]{43}$ die Cubicwurzel von 43, das heißt, eine solche Zahl, deren Cubus 43 ist, oder welche dreymal mit sich selbst multiplicirt, 43 giebt.

Anmerk. Die Ursache, warum man eine 3 in das Wurzelzeichen setzt, wenn man dadurch Cubicwurzeln anzeigen will, ist die, weil man die Cubiczahlen als Producte von 3 gleichen Factoren betrachten kann; denn von a ist der Cubus aaa.

§. 163.

Man kann also dergleichen Ausdrücke durchaus nicht zu den Rationalzahlen rechnen, sondern muß sie als eine besondere Art von Irrationalgrößen darstellen. Sie haben auch mit den Quadratwurzeln keine Gemeinschaft, und es ist nicht möglich, eine solche Cubicwurzel durch eine Quadratwurzel, als etwa $\sqrt{12}$ auszudrücken: denn da von $\sqrt{12}$, das Quadrat 12 ist, so ist der Cubus davon $12\sqrt{12}$,

also noch irrational, folglich kann derselbe nicht 43 seyn.

§. 164.

Ist aber die gegebene Zahl ein wirklicher Cubus, so werden diese Ausdrücke rational, also ist $\sqrt[3]{1}$ so viel als 1, $\sqrt[3]{8}$ so viel als 2, und $\sqrt[3]{27}$ so viel als 3, und überhaupt $\sqrt[3]{aaa}$ so viel als a.

§. 165.

Sollte man eine Cubicwurzel, als $\sqrt[3]{a}$, mit einer andern multipliciren, als mit $\sqrt[3]{b}$, so ist das Product $\sqrt[3]{ab}$; denn wir wissen, daß die Cubicwurzel aus einem Product ab gefunden wird, wenn man die Cubicwurzeln aus den Factoren mit einander multiplicirt. Und eben so, wenn $\sqrt[3]{a}$ durch $\sqrt[3]{b}$ dividirt werden soll, so ist der Quotient $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

§. 166.

Daher läßt sich einsehen, daß $2\sqrt[3]{a}$ so viel ist als $\sqrt[3]{8a}$, weil 2 gleich ist $\sqrt[3]{8}$. Eben so ist $3\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{27a}$, und $b\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{abbb}$. Also auch umgekehrt, wenn die Zahl hinter dem Zeichen einen Factor hat, der ein Cubus ist, so kann die Cubicwurzel daraus vor das Zeichen gesetzt werden. Also ist $\sqrt[3]{64a}$ so viel als $4\sqrt[3]{a}$, und $\sqrt[3]{125a}$ so viel als $5\sqrt[3]{a}$. Hieraus folgt, daß $\sqrt[3]{16}$ so viel ist als $2\sqrt[3]{2}$, weil 16 gleich 8.2 ist.

§. 167.

§. 167.

Ist die gegebene Zahl negativ, so hat die Cubicwurzel davon keine solche Schwierigkeit, wie oben bey den Quadratwurzeln; weil nehmlich die Cubi von negativen Zahlen auch negativ werden, so sind auch hinwiederum die Cubicwurzeln aus negativen Zahlen negativ. Also ist $\sqrt[3]{-8}$ so viel als -2, und $\sqrt[3]{-27}$ ist -3. Ferner $\sqrt[3]{-12}$ ist so viel als $-\sqrt[3]{12}$, und $\sqrt[3]{-a}$ so viel als $-\sqrt[3]{a}$. Woraus man sieht, daß das Zeichen (—), welches hinter dem Cubicwurzelzeichen steht, auch vor dasselbe geschrieben werden kann. Also wird man hier auf keine unmögliche oder eingebildete Zahlen geleitet, wie bey den Quadratwurzeln der negativen Zahlen.

XVI. Capitel.

Von den Dignitäten oder Potenzen überhaupt.

§. 101.

Wenn eine Zahl mehrmal mit sich selbst multiplicirt wird, so wird das Product eine Dignität oder Potenz, zuweilen auch eine Potestät genannt. Im Deutschen könnte man diesen Namen durch Macht ausdrücken. Da nun ein Quadrat entsteht, wenn eine Zahl zweymal, und ein Cubus, wenn die Zahl dreymal mit sich selbst multiplicirt wird, so sind sowohl die Quadrate, als die Cubi, unter dem Namen der Potenzen oder Dignitäten begriffen.

Anmerk. Für **Potenz** oder **Dignität** die deutschen Wörter **Macht** oder **Würde** zu gebrauchen, ist zwar von einigen neuern Schriftstellern versucht, aber durchaus abzurathen. Dieses gilt fast von allen neueingeführten mathematischen Kunstwörtern.

§. 169.

Diese Potenzen werden nach der Anzahl, wie vielmal eine Zahl mit sich selbst multiplicirt worden, von einander unterschieden. Also wenn eine Zahl zweymal mit sich selbst multiplicirt wird, so heißt das Product ihre zweyte Potenz, welche demnach eben so viel ist, als das Quadrat davon; wird eine Zahl dreymal mit sich selbst multiplicirt, so heißt das Product ihre dritte Potenz, welche also einerley Bedeutung mit dem Cubus hat: wird ferner eine Zahl viermal mit sich selbst multiplicirt, so wird das Product ihre vierte Potenz genannt, welche man gewöhnlich mit dem Namen des **Biquadrats** belegt: und hieraus ergiebt sich ferner von selbst, was die fünfte, sechste, siebente Potenz einer Zahl bedeute; welche höhere Potenzen übrigens mit keinem besondern Namen bezeichnet werden.

§. 170.

Um dieses besser zu erläutern, so muß man bemerken, erstlich, daß von der Zahl 1 alle Potenzen immer 1 bleiben; weil, so vielmal man auch 1 mit sich selbst multiplicirt, das Product immer 1 bleibt. Wir wollen daher die Potenzen der Zahl 2 sowohl als der Zahl 3 nach ihrer Ordnung herschreiben. Sie gehen folgendermaßen fort:

Poten-

Potenzen.	der Zahl 2.	der Zahl 3.
I.	2	3
II.	4	9
III.	8	27
IV.	16	81
V.	32	243
VI.	64	729
VII.	128	2187
VIII.	256	6561
IX.	512	19683
X.	1024	59049
XI.	2048	177147
XII.	4096	531441
XIII.	8192	1594323
XIV.	16384	4782969
XV.	32768	14348907
XVI.	65536	43046721
XVII.	131072	129140163
XVIII.	262144	387420489

Vorzüglich merkwürdig sind die Potenzen der Zahl 10, nehmlich

I. II. III. IV. V. VI.
10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000,

weil sich darauf unsere ganze Rechenkunst gründet. Uebrigens ist zu merken, daß die über die Zahlen 10, 100, 1000 u. s. w. gesetzten römischen Ziffern andeuten, die wievielste Potenz von 10 eine jede dieser Zahlen sey.

§. 171.

Will man die Sache auf eine allgemeine Art betrachten, so würden sich die Potenzen der Zahl a folgendergestalt verhalten.

I. II. III. IV. V. VI.
a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, aaaaaa, u. s. w.

Diese Art zu schreiben hat aber die Unbequemlichkeit, daß, wenn sehr hohe Potenzen geschrieben werden sollen, man eben denselben Buchstaben vielmal hinschreiben müßte, und es dem Leser noch viel beschwerlicher fallen würde, die Menge dieser Buchstaben zu zählen, um zu wissen, die wievielste Potenz dadurch angezeigt werde. Also z. B. würde sich die hundertste Potenz auf diese Art schwerlich schreiben lassen, und noch viel weniger zu erkennen seyn.

§. 172.

Um dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, hat man eine weit bequemere Art, solche Potenzen auszudrükken, eingeführt, die daher auf das sorgfältigste erklärt zu werden verdient. Man pflegt nemlich über der Zahl, wovon z. B. die hundertste Potenz angezeigt werden soll, etwas seitwärts zur Rechten die Zahl 100 zu schreiben: also a^{100}, welches ausgesprochen wird, a erhoben zu Hundert. Die oben dabey geschriebene Zahl, als in unserm Fall 100, wird der **Exponent der Potenz** genannt, welcher Name wohl zu merken ist.

§. 173.

Nach dieser Art deutet also a^2, oder a erhoben zu 2, die zweyte Potenz von a an, und pflegt auch bisweilen anstatt aa geschrieben zu werden; weil beyde Arten gleich leicht zu schreiben und zu verstehen sind. Hingegen wird gemeiniglich anstatt des Cubi oder der dritten Potenz aaa, nach dieser neuen Art a^3 geschrieben, weil dadurch mehr Platz erspart wird. Eben so drückt a^4 die vierte Potenz, a^5 die fünfte, und a die sechste Potenz von a aus, u. s. w.

Anmerk. Da $a^2 = a . a = 1 . a . a$; $a^3 = 1 . a . a . a$; $a^4 = 1 . a . a . a . a$, u. s. f. ist; und überhaupt $a^m = a . a . a \text{ - - - - } a = 1 . a . a . a \text{ - - - - } a$ seyn muß, wo a *m* mal vor-

vorkömmt; so bedeutet der Exponent m jeder mten Potenz von a nichts anders, als daß die Einheit so oft mit der Zahl a multiplicirt ist, als m Einheiten enthält, oder daß die Zahl a so vielmal mit sich selbst multiplicirt ist, als der Exponent weniger Eins anzeigt, voraus gesetzt, daß m eine ganze positive Zahl bedeutet.

§. 174.

Nach dieser Art werden alle Potenzen von der Zahl a folgendergestalt vorgestellt,

$a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}$, u. s. f.

woraus man sieht, daß für das erste Glied a füglich a^1 geschrieben werden könnte, um die Ordnung desto deutlicher in die Augen fallen zu machen. Daher ist a^1 nichts anders als a, weil die Einheit anzeigt, daß der Buchstabe a nur einmal geschrieben werden soll. Eine solche Reihe von Potenzen heißt eine geometrische Progression, weil immer ein jedes Glied gleich vielmal größer ist, als das vorhergehende.

§. 175.

Wie in dieser Reihe der Potenzen ein jedes Glied gefunden wird, wenn man das vorhergehende mit a multiplicirt, wodurch der Exponent um eins größer wird; so wird auch aus einem jeglichen Gliede das vorhergehende gefunden, wenn man jenes durch a dividirt, als wodurch der Exponent um eins vermindert wird. Hieraus sieht man, daß das dem ersten Glied a^1 vorhergehende Glied $\frac{a}{a}$ seyn müsse, das ist 1: nach dem Exponenten wird aber eben dasselbe a^0 seyn, woraus diese merkwürdige Eigenschaft folgt, daß a^0 allezeit 1 seyn müsse, die Zahl a mag auch so groß oder so klein seyn, als sie immer will, ja so

gar auch, wenn a nichts ist, also daß a^0 gewiß 1 ausmacht.

§. 176.

Diese Reihe von Potenzen läßt sich noch weiter rückwärts fortsetzen, und zwar auf eine doppelte Weise. Einmal, indem immer das Glied durch a getheilt wird; hernach aber auch, indem man den Exponenten um eins vermindert oder eins davon subtrahirt. Und es ist gewiß, daß nach beyden Arten die Glieder einander vollkommen gleich sind. Wir wollen also die obige Reihe auf diese doppelte Art rückwärts vorstellen, welche auch rückwärts von der Rechten zur Linken gelesen werden muß:

1ste	$\frac{1}{aaaaaa}$ $\frac{1}{a^6}$	$\frac{1}{aaaaa}$ $\frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{aaaa}$ $\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{aaa}$ $\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{aa}$ $\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$ $\frac{1}{a^1}$	1	a
2te	a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1

§. 177.

Hierdurch lernt man also solche Potenzen kennen, deren Exponenten negative Zahlen sind; und man ist im Stande den Werth derselben genau anzuzeigen. Wir wollen daher dasjenige, was wir gefunden, folgendergestalt vor Augen legen:

Erstlich a^0, ist so viel als 1.

— a^{-1} — — $\frac{1}{a}$

— a^{-2} — — $\frac{1}{aa}$ oder $\frac{1}{a^2}$

— a^{-3} — — $\frac{1}{a^3}$

— a^{-4} — — $\frac{1}{a^4}$ u. s. f.

Anmer-

Anmerk. Die Einheit *m* mal mit a multipliciren, und sie *m* mal mit a dividiren, sind entgegengesetzte Bedingungen: also ist auch $\frac{1}{aaa\ldots.a}$ das Entgegengesetzte von 1. a. a. a - - - - a, wenn bey jeder für sich genommenen Beziehung a *m* mal vorkömmt. So wie daher 1. a. a. a - - - a durch a^m angezeigt wird, eben so kann man $\frac{1}{a.a.a\ldots a} = \frac{1}{a^m}$ mit Recht durch a^{-m} anzeigen. Bey einer Bezeichnung, wie a^{-m}, müßte nemlich der Exponent — m durch seine Einheiten anzeigen, wie oft Eins mit a dividirt ist, also gerade das Entgegengesetzte von a^m.

Zwischen + 1 und — 1 liegt 0: da nun bey a^1 oder a die Einheit einmal mit a multiplicirt, und bey $a^{-1} = \frac{1}{a}$ dieselbe mit a dividirt ist, so muß bey a^0 die Einheit mit a weder multiplicirt noch dividirt, sondern ungeändert gelassen werden, das heißt: wenn man sich bey a^0 durch 0 einen Exponenten, und durch a^0 eine Potenz von a denken will, so muß man allemal $a^0 = 1$ setzen.

§. 178.

Hieraus ist auch klar, wie die Potenzen von einem Product, als ab, gefunden werden müssen. Diese sind nemlich:

ab oder a^1b^1, a^2b^2, a^3b^3, a^4b^4, a^5b^5, a^6b^6, u. s. f.

Eben so werden auch die Potenzen von Brüchen gefunden, als von dem Bruch $\frac{a}{b}$ sind die Potenzen folgende:

$$\frac{a^1}{b^1},\ \frac{a^2}{b^2},\ \frac{a^3}{b^3},\ \frac{a^4}{b^4},\ \frac{a^5}{b^5},\ \frac{a^6}{b^6},\ \frac{a^7}{b^7},$$ u. s. f.

§. 179.

Endlich kommen auch noch hier die Potenzen von negativen Zahlen vor. Es sey demnach gegeben die negative Zahl — a, so werden ihre Potenzen der Ordnung nach also auf einander folgen:

$-a, +a^2, -a^3, +a^4, -a^5, +a^6, -a^7$ u. s. f.

 woraus

woraus erhellet, daß nur diejenigen Potenzen, deren Exponenten ungerade Zahlen sind, negativ werden; hingegen sind diejenigen Potenzen, deren Exponenten gerade sind, alle positiv. Also müssen die dritte, fünfte, siebente, neunte Potenz der negativen Zahlen alle das Zeichen — haben.

Die zweyte, vierte, sechste, achte Potenz hingegen alle das Zeichen +.

XVII. Capitel.

Von den Rechnungsarten mit Potenzen.

§. 180.

Bey der Addition und Subtraction ist hier nichts zu bemerken, indem verschiedene Potenzen nur mit dem Zeichen + und — verbunden werden.

Also ist $a^3 + a^2$ die Summe von der dritten und zweyten Potenz der Zahl a; und $a^5 - a^4$ ist der Rest, wenn von der fünften Potenz die vierte abgezogen wird, und beydes läßt sich nicht kürzer ausdrücken. Wenn aber gleiche Potenzen vorkommen, so ergiebt sich, daß für $a^3 + a^3$ geschrieben werden kann $2a^3$ u. s. f.

§. 181.

Bey der Multiplication solcher Potenzen aber kommt verschiedenes zu bemerken vor. Erstlich, wenn eine jede Potenz von a mit der Zahl a selbst multiplicirt werden soll, so kommt die folgende Potenz heraus, deren Exponent um 1 größer ist. Also a^2 mit a multiplicirt, giebt a^3, und a^3 mit a multiplicirt, giebt a^4 u. s. f. Eben so mit denjenigen, deren

ren Exponenten negativ sind, wenn diese mit a multiplicirt werden sollen, darf man nur zu dem Exponenten 1 addiren. Also a^{-1} mit a multiplicirt, giebt a^{0}, das ist 1, welches daraus erhellet, weil a^{-1} so viel als $\frac{1}{a}$ (§. 176) ist, welches mit a multiplicirt, $\frac{a}{a}$ giebt, das ist 1. Eben so a^{-2}, wenn solches mit a multiplicirt werden soll, giebt a^{-1}, das ist $\frac{1}{a}$, und a^{-10} mit a multiplicirt, giebt a^{-9}, u. s. f.

§. 182.

Wenn aber eine Potenz mit aa, oder mit der zweyten Potenz multiplicirt werden soll, so wird der Exponent um 2 größer; also a^{2} mit a^{2} multiplicirt, giebt a^{4}, und a^{3} mit a^{2} multiplicirt, giebt a^{5}; ferner a^{4} mit a^{2} multiplicirt, giebt a^{6}, und überhaupt a^{n} mit a^{2} multiplicirt, giebt a^{n+2}. Eben so mit negativen Exponenten, als a^{-1} mit a^{2} multiplicirt, giebt a^{1}, das ist a, welches sich daraus ergiebt, weil a^{-1} ist $\frac{1}{a}$, dieses mit aa multiplicirt, giebt $\frac{aa}{a}$, das ist a. Eben so giebt a^{-2} mit a^{2} multiplicirt, a^{0}, das ist 1, ferner a^{-3} mit a^{2} multiplicirt, giebt a^{-1}.

§. 183.

Eben so beweiset man, daß, wenn eine jede Potenz der Wurzel a mit der dritten Potenz von a, oder mit a^{3} multiplicirt werden soll, der Exponent derselben um 3 vermehrt werden müsse; oder a^{n} mit a^{3} multiplicirt, giebt a^{n+3}. Und überhaupt, wenn zwey Potenzen von a mit einander multiplicirt werden sollen, so ist das Product wieder eine Potenz von a, deren Exponent die Summe von jenen Exponenten ist. Also a^{4} mit a^{5} multiplicirt, giebt a^{9},

und

und a^{12} mit a^7 multiplicirt, giebt a^{19}, oder a^n mit a^m multiplicirt, giebt a^{n+m}.

§. 184.

Aus diesem Grunde können die hohen Potenzen von bestimmten Zahlen ziemlich leicht gefunden werden; wenn man z. B. die 24ste Potenz von 2 haben wollte, so würde man dieselbe finden, wenn man die 12te Potenz mit der 12ten Potenz multiplicirte, weil 2^{24} so viel ist, als 2^{12} mit 2^{12} multiplicirt. Nun aber ist 2^{12}, wie wir oben gesehen haben, 4096: daher multiplicirt man 4096 mit 4096, so wird das Product 16777216 die verlangte Potenz, nemlich 2^{24} anzeigen.

§. 185.

Bey der Division ist folgendes zu merken. Erstlich wenn eine Potenz von a durch a dividirt werden soll, so wird ihr Exponent um 1 kleiner, oder man muß 1 davon subtrahiren. Also a^5 durch a dividirt, giebt a^4, und a^0, das ist 1, durch a dividirt, giebt a^{-1} oder $\frac{1}{a}$. Ferner a^{-3} durch a dividirt, giebt a^{-4}.

§. 186.

Wenn aber eine Potenz von a durch a^2 dividirt werden soll, so muß man von dem Exponenten derselben 2 abziehen, und wollte man dieselbe durch a^3 dividiren, so müßte man von ihrem Exponenten 3 abziehen. Also überhaupt, was für eine Potenz auch immer von a durch eine andere dividirt werden soll, so muß man von dem Exponenten der erstern den Exponenten der andern subtrahiren. Also a^{15} durch a^7 dividirt, giebt a^8, und a^6 durch a^7 dividirt, giebt a^{-1}. Ferner auch a^{-3} durch a^4 dividirt, giebt a^{-7}.

§. 187.

Hieraus ist leicht zu begreifen, wie Potenzen von Potenzen gefunden werden müssen, weil solches durch die Multiplication geschieht. Also wenn man die zweyte Potenz oder das Quadrat von a^3 verlangt, so ist dasselbe a^6, und die dritte Potenz, oder der Cubus von a^4 wird seyn a^{12}; woraus erhellet, daß, um das Quadrat einer Potenz zu finden, man den Exponenten derselben nur zu verdoppeln brauche. Also von a^n ist das Quadrat a^{2n}, und der Cubus oder die dritte Potenz von a^n wird seyn a^{3n}. Eben so wird auch die siebente Potenz von a^n gefunden a^{7n}, u. s. f.

§. 188.

Das Quadrat von a^2 ist a^4, das ist die vierte Potenz von a, welche daher das Quadrat des Quadrats ist. Hieraus erhellet, warum man die vierte Potenz ein Biquadrat oder auch ein Quadratoquadrat nennet.

Weil ferner von a^3 das Quadrat a^6 ist, so pflegt man auch die sechste Potenz einen Quadrato-Cubus zu nennen.

Endlich, weil der Cubus von a^3 ist a^9, das ist die neunte Potenz von a, so pflegt dieselbe deswegen auch ein Cubocubus genannt zu werden. Mehrere Namen sind heut zu Tage nicht üblich.

Anmerk. Die Rechenmeister drücken sich in der Potenzenrechnung sehr unbequem aus, ihre sehr zusammengesetzten Benennungen und Beziehungen sind jetzo nur als Antiquität merkwürdig. Man findet solche noch in Martini getreuem arithmetischen Wegweiser. Berlin 1741, 494 S. und in Marpurg Progressionalcalcul, Berlin 1774. 40 S.

XVIII. Capitel.

Von den Wurzeln in Absicht auf alle Potenzen.

§. 189.

Weil die Quadratwurzel einer gegebenen Zahl eine solche Zahl ist, deren Quadrat derselben gleich ist, und die Cubicwurzel eine solche, deren Cubus ihr gleich ist, so können auch von einer jeden gegebenen Zahl solche Wurzeln angezeigt werden, deren vierte oder fünfte, oder eine beliebige andere Potenz derselben gegebenen Zahl gleich ist. Um diese verschiedene Arten von Wurzeln von einander zu unterscheiden, wollen wir die Quadratwurzel die zweyte Wurzel, und die Cubicwurzel die dritte Wurzel nennen, da denn die Wurzel, deren vierte Potenz einer gegebenen Zahl gleich ist, ihre vierte Wurzel, und diejenige, deren fünfte Potenz derselben Zahl gleich ist, ihre fünfte Wurzel u. s. f. heißen wird.

§. 190.

Wie die zweyte oder Quadratwurzel durch das Zeichen $\sqrt{\ }$, und die dritte oder Cubicwurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[3]{\ }$ angedeutet wird; so pflegt man auf gleiche Weise die vierte Wurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[4]{\ }$, die fünfte Wurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[5]{\ }$, u. s. f. anzuzeigen; woraus denn klar ist, daß nach dieser Schreibart die Quadratwurzel durch $\sqrt[2]{\ }$ ausgedrückt werden sollte. Weil aber die Quadratwurzeln am häufigsten vorkommen, so wird der Kürze halber die Zahl 2 aus dem Wurzelzeichen weggelassen.

lassen. Daher, wenn in dem Wurzelzeichen keine Ziffer befindlich ist, so muß allezeit dadurch die Quadratwurzel verstanden werden.

§. 191.

Um dieses vor Augen zu legen, so wollen wir die verschiedenen Wurzeln der Zahl a hierher setzen, und ihre Bedeutung anzeigen.

$\sqrt{a}$ ist die IIte Wurzel von a
$\sqrt[3]{a}$ . . IIIte . . . a
$\sqrt[4]{a}$ . . IVte . . . a
$\sqrt[5]{a}$ . . Vte . . . a
$\sqrt[6]{a}$ . . VIte . . . a u. s. f.

Also daß hinwiederum die
IIte Potenz von $\sqrt{a}$ dem a gleich ist
IIIte . . . $\sqrt[3]{a}$. a . .
IVte . . . $\sqrt[4]{a}$. a . .
Vte . . . $\sqrt[5]{a}$. a . .
VIte . . . $\sqrt[6]{a}$. a . . u. s. f.

§. 192.

Die Zahl a mag nun groß oder klein seyn, so begreift man daher, wie alle Wurzeln von diesen verschiedenen Graden verstanden werden müssen.

Hierbey ist zu merken, daß, wenn für a die Zahl 1 genommen wird, alle diese Wurzeln immer 1 bleiben, weil alle Potenzen von 1 immer 1 sind.

Wenn aber die Zahl a größer ist als 1, so sind auch alle Wurzeln größer als 1.

Ist aber die Zahl kleiner als 1, so sind auch alle ihre Wurzeln kleiner als 1.

§. 192.

Ist die Zahl a positiv, so begreift man aus demjenigen, was oben von den Quadrat- und Cubicwurzeln angeführt worden, daß auch alle Wurzeln wirklich angezeigt werden können, und folglich wirkliche und mögliche Zahlen sind.

Ist aber die Zahl a negativ, so werden ihre zweyten, vierten, sechsten und überhaupt alle gerade Wurzeln unmögliche Zahlen, weil alle gerade Potenzen so wohl von positiven als negativen Zahlen immer das Zeichen plus bekommen (§. 188).

Hingegen aber werden die dritten, fünften, siebenten, und überhaupt alle ungerade Wurzeln negativ, weil die ungeraden Potenzen von negativen Zahlen auch negativ sind.

§. 194.

Daher erhält man also eine unendliche Menge neuer Arten von Irrational- oder surdischen Zahlen, denn so oft die Zahl a keine solche wirkliche Potenz ist, als die Wurzel anzeigt, so oft ist es auch nicht möglich, diese Wurzel durch ganze Zahlen oder Brüche auszudrücken, folglich gehört sie in dasjenige Geschlecht von Zahlen, welche Irrationalzahlen genannt werden.

XIX. Ca-

XIX. Capitel.

Von der Bezeichnung der Irrationalzahlen durch gebrochene Exponenten.

§. 195.

Wir haben oben im XVII. Capitel von den Rechnungsarten mit den Potenzen (§. 187) gezeigt, daß man das Quadrat von einer jeden Potenz finde, wenn man ihren Exponenten verdoppelt, und daß überhaupt das Quadrat oder die zweyte Potenz von a^n, a^{2n} sey. Daher ist hinwiederum von der Potenz a^{2n} die Quadratwurzel a^n, und wird folglich gefunden, wenn man den Exponenten derselben halbirt oder durch 2 dividirt.

§. 196.

Also ist von a^2 die Quadratwurzel a^1, von a^4 ist die Quadratwurzel a^2, und von a^6 ist die Quadratwurzel a^3, u. s. f. Weil nun dieses eine allgemeine Wahrheit ist, so sieht man, wenn die Quadratwurzel von a^3 gefunden werden soll, daß dieselbe $a^{\frac{3}{2}}$ seyn werde. Eben so wird von a^5 die Quadratwurzel seyn $a^{\frac{5}{2}}$. Folglich von der Zahl a selbst oder von a^1 wird die Quadratwurzel seyn $a^{\frac{1}{2}}$. Woraus erhellet, daß $a^{\frac{1}{2}}$ eben so viel sey als $\sqrt{}a$, welche neue Art die Quadratwurzel anzudeuten wohl zu bemerken ist.

§. 197.

Es ist ferner gezeigt, daß, um den Cubus von einer Potenz, als a^n, zu finden, man ihren Exponenten mit 3 multipliciren müsse, und also der Cubus davon a^{3n} ist.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

Wenn also rückwärts von der Potenz a^{3n} die dritte oder die Cubicwurzel gefunden werden soll, so ist dieselbe a^n, und man hat nur nöthig, den Exponenten jener durch 3 zu dividiren. Also von a^3 ist die Cubicwurzel a^1 oder a, von a^6 ist dieselbe a^2, von a^9 ist dieselbe a^3, u. s. f.

§. 198.

Dieses muß nun auch wahr seyn, wenn sich der Exponent nicht durch 3 theilen läßt, und daher wird von a^2 die Cubicwurzel seyn $a^{\frac{2}{3}}$. Und von a^4 ist dieselbe $a^{\frac{4}{3}}$ oder $a^{1\frac{1}{3}}$. Folglich wird auch von der Zahl a selbst, das ist von a^1, die Cubic- oder dritte Wurzel seyn $a^{\frac{1}{3}}$. Hieraus sieht man, daß $a^{\frac{1}{3}}$ eben so viel sey als $\sqrt[3]{a}$.

§. 199.

Eben so verhält es sich auch mit den höhern Wurzeln, und die vierte Wurzel von a wird seyn $a^{\frac{1}{4}}$, welches folglich eben so viel ist als $\sqrt[4]{a}$. Gleicher Weise wird die fünfte Wurzel von a seyn $a^{\frac{1}{5}}$, welches eben so viel ist als $\sqrt[5]{a}$, und dieses ist auch von allen höhern Wurzeln zu verstehen.

§. 200.

Man könnte nun also die schon längst eingeführten Wurzelzeichen gänzlich entbehren, und anstatt derselben die hier erklärten gebrochenen Exponenten gebrauchen; allein da man einmal an jene Zeichen gewöhnt ist, und diese in allen Schriften vorkommen, so ist es nicht rathsam, sie ganz abzuschaffen. Doch wird diese neue Art jetzt auch häufig gebraucht, weil sie die Natur der Sache deutlich in sich faßt. Denn

daß

daß $a^{\frac{1}{2}}$ wirklich die Quadratwurzel von a sey, siehet man gleich, wenn man nur das Quadrat davon nimmt, welches geschieht, wenn man $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt, da denn offenbar herauskommt a^1, das ist a.

§. 201.

Hieraus ersieht man auch, wie alle übrige gebrochene Exponenten verstanden werden müssen; als wenn man $a^{\frac{4}{3}}$ hat, so muß von der Zahl a erstlich ihre vierte Potenz a^4 genommen, und hernach die Cubic- oder dritte Wurzel gezogen werden, also daß $a^{\frac{4}{3}}$ eben so viel ist, als nach der gemeinen Art $\sqrt[3]{a^4}$. Eben so wird der Werth von $a^{\frac{3}{4}}$ gefunden, wenn man erstlich den Cubus oder die dritte Potenz von a sucht, welche a^3 ist und hernach aus derselben die vierte Wurzel ziehet: so daß also $a^{\frac{3}{4}}$ eben so viel ist, als $\sqrt[4]{a^3}$. Eben so ist $a^{\frac{4}{5}}$ eben so viel, als $\sqrt[5]{a^4}$ u. s. f.

Anmerk. Bey Potenzen, wie $a^{\frac{n}{m}}$ mit gebrochenen Exponenten, kann man sich die Sache auch so vorstellen: die gegebene Wurzel (a) soll in so viel gleiche Factoren zertheilt werden, als der Nenner oder Divisor (m) anzeigt, und von diesen gleichen Factoren soll man so viel behalten, als der Zähler oder der Dividendus (n) anzeigt. Z. B. $a^{\frac{2}{5}}$; hier stelle man sich vor, a sey = xxxxx, und von diesen 5 gleichen Factoren behält man nur 2, also xx, so hat man $a^{\frac{2}{5}}$.

Denn hier ist $x = \sqrt[5]{a}$, folglich $x^2 = (\sqrt[5]{a})^2 = \sqrt[5]{a}$. $\sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{a^2} = a^{\frac{2}{5}}$.

§. 202.

Wenn der Bruch, der den Exponenten vorstellt, größer ist als 1, so läßt sich der Werth auch auf fol-

 gende

folgende Art bestimmen. Es sey gegeben $a^{\frac{5}{2}}$, so ist dieses so viel als $a^{2\frac{1}{2}}$, welches heraus kommt, wenn man a^2 mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt. Da nun $a^{\frac{1}{2}}$ so viel ist als $\sqrt{a}$, so ist $a^{\frac{5}{2}}$ so viel als $a^2\sqrt{a}$. Eben so ist $a^{\frac{10}{3}}$, das ist $a^{3\frac{1}{3}}$, eben so viel als $a^3\sqrt[3]{a}$; und $a^{\frac{15}{4}}$, das ist $a^{3\frac{3}{4}}$, ist eben so viel als $a^3\sqrt[4]{a^3}$. Aus diesem allen zeigt sich hinlänglich der herrliche Gebrauch der gebrochenen Exponenten.

§. 203.

Auch in Brüchen hat dies seinen großen Nutzen. Es sey z. B. gegeben $\frac{1}{\sqrt{a}}$, so ist dieses so viel als $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$. Wir haben aber oben gesehen, daß ein solcher Bruch $\frac{1}{a^n}$ durch a^{-n} ausgedrückt werden kann, folglich kann $\frac{1}{\sqrt{a}}$ durch $a^{-\frac{1}{2}}$ ausgedrückt werden. Eben so wird $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ seyn $a^{-\frac{1}{3}}$, und $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}}$ wird verwandelt in $\frac{a^2}{a^{\frac{3}{4}}}$, woraus entspringet a^2, multiplicirt mit $a^{-\frac{3}{4}}$, welches ferner verwandelt wird in $a^{\frac{5}{4}}$, das ist $a^{1\frac{1}{4}}$, und das ist ferner $a\sqrt[4]{a}$. Dergleichen Reductionen werden durch Uebung gar merklich erleichtert.

§. 204.

Endlich ist noch zu merken, daß eine jede solche Wurzel auf vielerley Art kann vorgestellt werden. Denn da $\sqrt{a}$ so viel ist als $a^{\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{2}$ in alle diese Brüche: $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$, u. s. f. verwandelt werden kann; so ist klar, daß $\sqrt{a}$ so viel ist als $\sqrt[4]{a^2}$, imgleichen auch $\sqrt[6]{a^3}$ und $\sqrt[8]{a^4}$ u. s. f. Eben

so

so ist $\sqrt[3]{a}$ so viel als $a^{\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{1}{3}}$ aber so viel als $\sqrt[6]{a^2}$, oder $\sqrt[9]{a^3}$, oder $\sqrt[12]{a^4}$. Hieraus sieht man leicht, daß die Zahl a selbst, oder a^1, durch folgende Wurzelzeichen ausgedrückt werden könne:

$\sqrt[2]{a^2}$, oder $\sqrt[3]{a^3}$, oder $\sqrt[4]{a^4}$, oder $\sqrt[5]{a^5}$, u. s. f.

§. 205.

Dieses kommt bey der Multiplication und Division wohl zu statten: als z. B. wenn $\sqrt[2]{a}$ mit $\sqrt[3]{a}$ multiplicirt werden soll, so schreibe man anstatt $\sqrt[2]{a}$ die $\sqrt[6]{a^3}$, und anstatt $\sqrt[3]{a}$ die $\sqrt[6]{a^2}$. So bekommt man gleiche Wurzelzeichen, und erhält daher das Product $\sqrt[6]{a^5}$. Welches auch daraus erhellet, weil $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{3}}$ multiplicirt, $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ giebt. Nun aber ist $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{5}{6}$, und also das Product $a^{\frac{5}{6}}$ oder $\sqrt[6]{a^5}$. Sollte $\sqrt[2]{a}$ oder $a^{\frac{1}{2}}$ durch $\sqrt[3]{a}$ oder $a^{\frac{1}{3}}$ dividirt werden, so bekömmt man $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$, das ist $a^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$, also $a^{\frac{1}{6}}$, folglich $\sqrt[6]{a}$.

XX. Capitel.

Von den verschiedenen Rechnungsarten und ihrer Verbindung überhaupt.

§. 206.

Wir haben bisher verschiedene Rechnungsarten, als die Addition, Subtraction, Multiplication und Division, die Erhebung zu Potenzen, und endlich die Ausziehung der Wurzeln, vorgetragen.

Daher wird es zur bessern Erläuterung dienen, wenn wir den Ursprung dieser Rechnungsarten und ihre Verbindung unter sich deutlich erklären, damit man daraus schließen könne, ob noch andere dergleichen Arten möglich sind oder nicht.

Zu diesem Ende brauchen wir ein neues Zeichen, welches anstatt der bisher so häufig vorgekommenen Redensart, ist so viel als, gesetzt werden kann. Dieses Zeichen ist nun =, und wird ausgesprochen, ist gleich. Also wenn geschrieben wird $a=b$, so ist die Bedeutung, daß a eben so viel sey als b, oder daß a dem b gleich sey; also ist z. B. $3 . 5 = 15$.

§. 207.

Die erste Rechnungsart, welche sich unserm Verstand darstellt, ist unstreitig die Addition, durch welche zwey Zahlen zusammen addirt, oder die Summe derselben gefunden werden soll. Es seyen demnach a und b die zwey gegebenen Zahlen und ihre Summe werde durch den Buchstaben c angedeutet, so hat man $a + b = c$. Also wenn die beyden Zahlen a und b bekannt sind, so lehrt die Addition, wie man daraus die Zahl c finden soll.

§. 208.

Man behalte diese Vergleichung $a + b = c$, kehre aber jetzt die Frage um, und frage, wenn die Zahlen a und c bekannt sind, wie man die Zahl b finden soll.

Man frägt also, was man für eine Zahl zu der Zahl a addiren müsse, damit die Zahl c herauskomme. Es sey z. B. $a = 3$ und $c = 8$, also daß $3 + b = 8$ seyn müßte, so ist klar, daß b gefunden wird, wenn man 3 von 8 subtrahirt. Ueberhaupt also, um b zu finden, so muß man a von c subtra-

hiren

hiren und da wird $b = c - a$. Denn wenn a dazu addirt wird, so bekommt man $c - a + a$, das ist c. Hierin besteht also der Ursprung der Subtraction.

§. 209.

Die Subtraction entsteht also, wenn die Frage, welche bey der Addition vorkommt, umgekehrt wird. Und da es sich zutragen kann, daß die Zahl, welche abgezogen werden soll, größer ist, als diejenige, von der sie abgezogen werden soll: als wenn z. B. 9 von 5 abgezogen werden sollte; so erhalten wir daher den Begriff von einer neuen Art Zahlen, welche negativ genannt werden, weil $5 - 9 = - 4$.

§. 210.

Wenn viele Zahlen, welche zusammen addirt werden sollen, einander gleich sind, so wird ihre Summe durch die Multiplication gefunden, und heißt alsdenn das Product. Also bedeutet ab das Product, welches entsteht, wenn die Zahl a mit der Zahl b multiplicirt wird. Wenn wir nun dieses Product mit dem Buchstaben c andeuten, so haben wir $ab = c$, und die Multiplication lehrt, wenn die Zahlen a und b bekannt sind, wie man daraus die Zahl c finden solle.

§. 211.

Man werfe nun folgende Frage auf: wenn die Zahlen c und a bekannt sind, wie soll man daraus die Zahl b finden? Es sey z. B. $a = 3$ und $c = 15$, so daß $3b = 15$, und es werde gefragt, mit was für einer Zahl man 3 multipliciren müsse, damit 15 heraus-komme? Dieses geschieht nun durch die Division und wird daher überhaupt die Zahl b gefunden, wenn

 man

man c durch a dividirt; woraus folglich diese Gleichung entsteht $b = \frac{c}{a}$.

§. 212.

Weil es sich nun oft zutragen kann, daß sich die Zahl c nicht wirklich durch die Zahl a theilen läßt, und gleichwohl der Buchstaben b einen bestimmten Werth haben muß, so werden wir auf eine neue Art von Zahlen geleitet, welche Brüche genannt werden. Also wenn wir annehmen $a = 4$, und $c = 3$, also daß $4b = 3$, so sieht man wohl, daß b keine ganze Zahl seyn kann, sondern ein Bruch ist, nemlich $b = \frac{3}{4}$.

§. 213.

Wie nun die Multiplication aus der Addition entstanden ist, wenn viele Zahlen, die addirt werden sollen, einander gleich waren, so wollen wir jetzt auch bey der Multiplication annehmen, daß viele gleiche Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen, und dadurch gelangen wir zu den Potenzen, welche auf eine allgemeine Art durch diese Form a^b vorgestellt werden, wodurch angezeigt wird, daß die Zahl a so viele mal mit sich selbst multiplicirt werden müsse, als die Zahl b anweiset. Hier wird, wie oben schon erklärt worden, a die Wurzel, b der Exponent und a^b die Potenz genannt.

§. 214.

Laßt uns nun diese Potenz selbst durch den Buchstaben c andeuten, so haben wir $a^b = c$, worin also drey Buchstaben, a, b, c, vorkommen. Dieses vorausgesetzt, so wird in der Lehre von den Potenzen gezeiget, wie man, wenn die Wurzel a nebst dem Exponenten b bekannt ist, daraus die Potenz

selbst,

selbst, das ist den Buchstaben c bestimmen soll. Es sey z. B. a = 5 und b = 3, also $c = 5^3$: woraus man sieht, daß von 5 die dritte Potenz genommen werden müsse, welche 125 ist; also wird c = 125.

Hier wird also gelehrt, wie man aus der Wurzel a und den Exponenten b die Potenz c finden soll.

§. 215.

Wir wollen nun auch hier sehen, wie die Frage umgekehrt oder verändert werden kann, also daß aus zweyen von diesen dreyen Zahlen a, b, c, die dritte gefunden werden soll, welches auf zweyerley Art geschehen kann, indem nebst dem c, entweder a oder b, für bekannt angenommen wird. Wobey zu merken, daß in den obigen Fällen bey der Addition und Multiplication nur eine Veränderung statt findet, weil im ersten Fall, wo a + b = c, es gleich viel ist, ob man nebst dem c noch a oder b für bekannt annimmt, indem es gleich viel ist, ob ich schreibe a + b oder b + a; und eben so verhält es sich auch mit der Gleichung ab = c oder ba = c, wo die Buchstaben a und b ebenfalls verwechselt werden können. Allein dieses findet nicht bey den Potenzen statt, indem für a^b keinesweges gesetzt werden kann b^a, welches aus einem einzigen Exempel leicht zu ersehen; wenn z. B. a = 5 und b = 3 gesetzt wird, so wird $a^b = 5^3 = 125$. Hingegen wird $b^a = 3^5 = 243$, welches sehr weit von 125 verschieden ist.

§. 216.

Hieraus ergiebt sich, daß hier wirklich noch zwey Fragen angestellt werden können, wovon die erste ist: wenn nebst der Potenz c noch der Exponent b gegeben wird, wie man daraus die Wurzel a finden soll? Die zweyte

Frage aber ist: wenn nebst der Potenz c noch die Wurzel a für bekannt angenommen wird, wie man daraus den Exponenten b finden soll?

§. 217.

Im obigen ist nur die erste von diesen zwey Fragen erörtert worden, und zwar im 18ten Capitel in der Lehre von den Wurzeln u. s. w. Denn wenn man z. B. $b = 2$ und $a^2 = c$, so muß a eine solche Zahl seyn, deren Quadrat dem c gleich sey, und da wird $a = \sqrt{c}$. Eben so, wenn $b = 3$, so hat man $a^3 = c$; da muß also der Cubus von a der gegebenen Zahl c gleich seyn, und da erhält man $a = \sqrt[3]{c}$. Hieraus läßt sich auf eine allgemeine Art verstehen, wie man aus den beyden Buchstaben c und b den Buchstaben a finden müsse. Es wird nemlich seyn $a = \sqrt[b]{c}$.

§. 218.

So oft es sich nun ereignet, daß die gegebene Zahl c nicht wirklich eine solche Potenz ist, deren Wurzel verlangt wird, so ist schon oben (§. 128) bemerkt worden, daß die verlangte Wurzel a weder in ganzen Zahlen noch in Brüchen könne ausgedrückt werden. Da nun dieselbe gleichwohl ihren bestimmten Werth haben muß, so sind wir dadurch zu einer neuen Art von Zahlen gelanget, welche Irrational- oder surdische Zahlen genannt werden; von welchen es nach der Mannigfaltigkeit der Wurzeln, so gar unendlich vielerley Arten giebt. Auch hat uns diese Betrachtung noch auf eine ganz besondere Art von Zahlen geleitet, welche unmöglich sind und imaginäre oder eingebildete Zahlen genannt werden.

§. 219.

§. 219.

Man sieht also, daß uns noch eine Frage zu betrachten übrig ist, nemlich, wenn außer der Potenz c noch die Wurzel a für bekannt angenommen wird, wie man daraus den Exponenten finden soll? Diese Frage wird uns auf die wichtige Lehre von den Logarithmen leiten, deren Nutzen in der ganzen Mathematik so groß ist, daß fast keine weitläufige Rechnung ohne Hülfe der Logarithmen zu Stande gebracht werden kann. Wir werden also diese Lehre in dem folgenden Capitel erklären, und dies wird uns wieder auf ganz neue Arten von Zahlen leiten, welche nicht einmal zu den obigen Irrationalen gerechnet werden können.

XXI. Capitel.

Von den Logarithmen überhaupt.

§. 220.

Wir betrachten also diese Gleichung $a^b = c$, und bemerken dabey wir zuerst, daß in der Lehre von den Logarithmen für die Wurzel a eine gewisse Zahl nach Belieben festgestellet werde, also daß diese immer einen gleichen Werth behalte. Wenn nun der Exponent b also angenommen wird, daß die Potenz a^b einer gegebenen Zahl c gleich werde, so wird der Exponent b der Logarithmus dieser Zahl c genannt, und um die Logarithmen anzuzeigen, pflegt man sich entweder der ersten Sylbe oder des ersten Buchstabens von diesem Worte zu bedienen. So schreibt

man

man z. B. $b = \log. c$, oder $b = \lg. c$; oder auch $b = lc.$, und lieset: b ist der Logarithmus von c.

§. 221.

Nachdem also die Wurzel a einmal festgestellt worden, so ist der Logarithmus einer jeden Zahl c nichts anders, als der Exponent derjenigen Potenz von a, welche der Zahl c gleich ist. Da nun $c = a^b$, so ist b der Logarithmus der Potenz a^b. Setzt man nun $b = 1$, so ist 1 der Logarithmus von a^1, das ist $\log. a = 1$: setzt man $b = 2$, so ist 2 der Logarithmus von a^2, das ist $\log. a^2 = 2$. Eben so wird man haben: $\log. a^3 = 3$, $\log. a^4 = 4$, $\log. a^5 = 5$ u. s. f.

1. Erklärung. Wenn eine Zahl a beständig einerley Werth behält, so kann man annehmen, daß sie zur x Potenz erhoben einer andern gegebenen Zahl gleich werde, wie der Ausdruck $a^x = c$. Sodann pflegt man den zu suchenden Exponenten x den Logarithmen von c, die Zahl a die Basis oder Grundzahl zu nennen.

Wird in dem Ausdrucke $a^x = c$ für c nach und nach eine andere Zahl gesetzt, so muß, wenn a einerley bleibt, der Exponent x, d. i. der Logarithme von c, verändert gefunden werden. Setzt man nun für c die auf einander folgenden natürlichen Zahlen, so wird sodann eine Reihe Logarithmen von diesen Zahlen entstehen. Eine solche Reihe von Logarithmen mit den dazu gehörigen Zahlen für einerley Grundzahl heißt ein logarithmisches System. Es kann demnach unzählich viele verschiedene logarithmische Systeme geben, weil man für die Grundzahl des Systems jede willkührliche Zahl annehmen kann.

2. Erklärung. Logarithmentafeln sind ein Buch, worin die Logarithmen einer Reihe von Zahlen für eine gewisse Basis berechnet worden sind. Bey den gewöhnlichen Logarithmentafeln, welchen man auch Tabularlogarithmen oder nach dem Erfinder Brigge, briggische Logarithmen benennet, liegt die Basis 10 zum Grunde.

§. 222.

Setzt man $b = 0$, so wird 0 der Logarithmus seyn von a^0: nun aber ist $a^0 = 1$, und also ist $\log. 1 = 0$,

$1 = 0$, die Wurzel a mag angenommen werden, wie man will.

Setzt man ferner $b = -1$, so wird -1 der Logarithmus von a^{-1}. Es ist aber $a^{-1} = \frac{1}{a}$; also hat man $\log.\frac{1}{a} = -1$. Eben so bekommt man $\log.\frac{1}{a^2} = -2$, $\log.\frac{1}{a^3} = -3$, $\log.\frac{1}{a^4} = -4$ u. s. f.

§. 223.

Hieraus erhellet, wie die Logarithmen von allen Potenzen der Wurzel a und auch so gar von Brüchen, deren Zähler $= 1$, der Nenner aber eine Potenz von a ist, können angezeigt werden; in welchen Fällen die Logarithmen ganze Zahlen sind. Nimmt man aber für b Brüche an, so werden diese Logarithmen von Irrationalzahlen; wenn nemlich $b = \frac{1}{2}$, so ist $\frac{1}{2}$ der Logarithmus von $a^{\frac{1}{2}}$, oder von $\sqrt{a}$. Daher bekommt man $\log.\sqrt{a} = \frac{1}{2}$; eben so $\log.\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$ und $\log.\sqrt[4]{a} = \frac{1}{4}$, u. s. f.

§. 224.

Wenn aber der Logarithmus von einer andern Zahl c gefunden werden soll, so sieht man leicht, daß derselbe weder eine ganze Zahl noch ein Bruch seyn kann. Inzwischen muß es doch immer einen solchen Exponenten geben, nemlich b, so daß die Potenz a^b der gegebenen Zahl c gleich werde, und alsdann hat man $b = \log. c$. Folglich hat man auf eine allgemeine Art $a^{\log. c.} = c$.

§. 225.

Wir wollen nun eine andere Zahl d betrachten, deren Logarithmus ebenfalls durch log. d angedeutet wird,

wird, also daß $a^{\log.d} = d$. Man multiplicire nun diese Formel mit der vorhergehenden $a^{\log.c} = c$, so bekommt man $a^{\log.c + \log.d} = cd$: nun aber ist der Exponent allezeit der Logarithmus der Potenz, folglich ist $\log.c + \log.d = \log.cd$. Dividirt man aber die erste Formel durch die letztere, so bekommt man $a^{\log.c - \log.d} = \frac{c}{d}$. Folglich wird $\log.c - \log.d = \log.\frac{c}{d}$.

§. 226.

Hierdurch werden wir zu den zwey Haupteigenschaften der Logarithmen geführt, wovon die erste in der Gleichung $\log.c + \log.d = \log.cd$ besteht, und woraus wir lernen, daß der Logarithmus von einem Product als cd gefunden werde, wenn man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt. Die zweyte Eigenschaft ist in der Gleichung $\log.c - \log.d = \log.\frac{c}{d}$ enthalten und zeiget an, daß der Logarithmus von einem Bruch gefunden werde, wenn man von dem Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners subtrahirt.

§. 227.

Und eben hierin bestehet der große Nutzen, den die Logarithmen in der Rechenkunst leisten. Denn wenn zwey Zahlen mit einander multiplicirt oder dividirt werden sollen, so hat man nur nöthig, die Logarithmen derselben zu addiren oder zu subtrahiren. Es ist aber offenbar, daß es ungleich viel leichter sey, Zahlen zu addiren oder subtrahiren, als zu multipliciren oder dividiren, besonders wenn die Zahlen sehr groß sind.

§. 228.

§. 228.

Noch wichtiger aber ist der Nutzen bey den Potenzen und der Ausziehung der Wurzeln. Denn wenn $d = c$, so hat man aus der erstern Eigenschaft $\log. c + \log. c = \log. cc$, also ist $\log. c^2 = 2 \log. c$; eben so bekommt man $\log. c^3 = 3 \log. c$ und $\log. c^4 = 4 \log. c$, und allgemein $\log. c^n = n \log. c$.

Nimmt man nun für n gebrochene Zahlen an, so bekommt man $\log. c^{\frac{1}{2}}$, das ist $\log. \sqrt{c} = \frac{1}{2} \log. c$; ferner auch für negative Zahlen $\log. c^{-1}$, das ist $\log. \frac{1}{c} = -\log. c$, und $\log. c^{-2}$, das ist $\log. \frac{1}{c^2} = -2 \log. c$, u. s. f.

§. 229.

Wenn man also solche Tabellen hat, worin für alle Zahlen die Logarithmen berechnet sind, so kann man durch Hülfe derselben die schwersten Rechnungen, wo große Multiplicationen und Divisionen oder auch Erhebungen zu Potenzen und Ausziehungen der Wurzeln vorkommen, mit leichter Mühe ausführen, weil man in diesen Tafeln so wohl für jede Zahl ihre Logarithmen, als auch für einen jeden Logarithmus die Zahl selbst, finden kann. Also wenn man aus einer Zahl c die Quadratwurzel finden soll, so sucht man erstlich den Logarithmus der Zahl c, welcher ist $\log. c$, hernach nimmt man davon die Hälfte, welche ist $\frac{1}{2} \log. c$, und diese ist der Logarithmus der gesuchten Quadratwurzel; also die Zahl, die diesem Logarithmus zukommt, und in der Tafel gefunden wird, ist die Quadratwurzel selbst.

§. 230.

Wir haben schon oben gesehen, daß die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, u. s. f. und folglich alle positive

Zahlen

Zahlen Logarithmen der Wurzel a und ihren positiven Potenzen sind; das ist von Zahlen, die größer sind, als Eins.

Hingegen die negativen Zahlen, als: — 1, — 2 u. s. f. sind Logarithmen von den Brüchen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$ u. s. f., welche kleiner als Eins, aber gleichwohl noch größer als Null sind.

Hieraus folgt, daß wenn der Logarithmus positiv ist, die Zahl immer größer sey als Eins; wenn aber der Logarithmus negativ ist, so ist die Zahl immer kleiner als Eins, doch aber größer als Null. Folglich können für negative Zahlen keine Logarithmen angezeigt werden, oder die Logarithmen von negativen Zahlen sind unmöglich und gehören zu dem Geschlecht der imaginären oder eingebildeten Zahlen.

§. 231.

Um dieses besser zu erläutern, wird es gut seyn, für die Wurzel a eine bestimmte Zahl anzunehmen, und zwar diejenige, nach welcher die gebräuchlichen logarithmischen Tabellen berechnet sind. Es wird aber darin die Zahl 10 für die Wurzel a angenommen, weil nach derselben schon die ganze Rechenkunst eingerichtet ist. Man sieht aber leicht, daß dafür eine jede andere Zahl, die nur größer ist als Eins, angenommen werden könnte; denn wenn man a = 1 setzen wollte, so würden alle Potenzen davon als $a^b = 1$, und immer Eins bleiben, und niemals einer andern gegebenen Zahl, als c, gleich werden können.

XXII. Capitel.

Von den gebräuchlichen Logarithmischen Tabellen.

§. 232.

In diesen Tabellen wird, wie schon oben gesagt worden, angenommen, daß die Wuzel $a = 10$ sey; also ist der Logarithmus von einer jeden Zahl c derjenige Exponent, welcher anzeigt, zu was für einer Potenz man die Zahl 10 erheben müsse, um die Zahl c zu erhalten. Oder wenn der Logarithmus der Zahl c durch $\log. c$ angedeutet wird, so hat man immer $10^{\log. c} = c$.

§. 233.

Wir haben schon bemerkt, daß von der Zahl 1 der Logarithmus immer 0 sey, weil $10^0 = 1$; also ist $\log. 1 = 0$, $\log. 10 = 1$, $\log. 100 = 2$, $\log. 1000 = 3$, $\log. 10000 = 4$, $\log. 100000 = 5$, $\log. 1000000 = 6$. Ferner $\log. \frac{1}{10} = -1$, $\log. \frac{1}{100} = -2$, $\log. \frac{1}{1000} = -3$, $\log. \frac{1}{10000} = -4$, $\log. \frac{1}{100000} = -5$, $\log. \frac{1}{1000000} - 6$.

§. 234.

Wie sich nun die Logarithmen von diesen Hauptzahlen von selbst ergeben, so schwer ist es, die Logarithmen aller übrigen dazwischen liegenden Zahlen zu finden, welche gleichwohl in den Tabellen müssen angezeigt werden. Hier ist auch noch nicht der Ort, eine hinlängliche Anweisung zu geben, wie diese gefunden werden können, daher wollen wir nur überhaupt bemerken, was dabey zu beobachten vorkommt.

§. 235.

Da nun log. $1 = 0$, und log. $10 = 1$, so ist leicht zu erachten, daß von allen Zahlen zwischen 1 und 10, die Logarithmen zwischen 0 und 1 enthalten seyn müssen, oder sie sind größer als 0, und doch kleiner als 1.

Laßt uns nur die Zahl 2 betrachten, so ist gewiß, daß ihr Logarithmus, den wir durch den Buchstaben x andeuten wollen, also log. $2 = x$, größer sey als 0, und doch kleiner als 1. Es muß aber eine solche Zahl seyn, daß 10^x genau der Zahl 2 gleich werde.

Man kann auch leicht sehen, daß x viel kleiner seyn müsse als $\frac{1}{2}$, oder daß $10^{\frac{1}{2}}$ größer sey als 2, denn wenn man von beyden die Quadrate nimmt, so wird das Quadrat von $10^{\frac{1}{2}} = 10$: das Quadrat von 2 aber wird 4, also viel kleiner. Eben so ist auch $\frac{1}{3}$ für x noch zu groß, oder $10^{\frac{1}{3}}$ ist größer als 2. Denn der Cubus von $10^{\frac{1}{3}} = 10$, der Cubus von 2 aber ist nur 8. Hingegen ist $\frac{1}{4}$ für x angenommen zu klein: denn $10^{\frac{1}{4}}$ ist kleiner als 2, weil die vierte Potenz von jenem 10 ist, von diesem aber 16. Hieraus sieht man also, daß x oder der log. 2 kleiner ist als $\frac{1}{3}$ und doch größer als $\frac{1}{4}$; man kann auch für einen jeden andern Bruch, der zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ ist, finden, ob derselbe zu groß oder zu klein sey. Also ist $\frac{2}{7}$ kleiner als $\frac{1}{3}$ und größer als $\frac{1}{4}$; wollte man nun $\frac{2}{7}$ für x nehmen, so müßte $10^{\frac{2}{7}} = 2$ seyn; fände aber dieses statt, so müssen auch die siebenten Potenzen einander gleich seyn: es ist aber von $10^{\frac{2}{7}}$ die siebente Potenz $= 10^2 = 100$, welche der siebenten Potenz von 2 gleich seyn müßte; da nun die siebente Potenz von $2 = 128$ und also

größer

größer als jene ist, so ist auch $10^{\frac{2}{7}}$ kleiner als 2, und also $\frac{2}{7}$ kleiner als log. 2: oder log. 2 ist größer als $\frac{2}{7}$ und doch kleiner als $\frac{1}{3}$.

Ein Bruch nun, der kleiner als $\frac{1}{3}$, aber größer als $\frac{2}{7}$, ist $\frac{3}{10}$; sollte nun $10^{\frac{3}{10}} = 2$ seyn, so müßten auch die zehnten Potenzen einander gleich seyn: es ist aber von $10^{\frac{3}{10}}$ die zehnte Potenz $= 10^3 = 1000$, von 2 aber ist die zehnte Potenz $= 1024$; woraus wir schließen, daß $\frac{3}{10}$ noch zu klein ist, oder daß log. 2 größer sey als $\frac{3}{10}$, und doch kleiner als $\frac{1}{3}$.

§. 236.

Dies dient dazu, um zu zeigen, daß log. 2 seine bestimmte Größe habe, weil wir wissen, daß derselbe gewiß größer ist als $\frac{3}{10}$ und doch kleiner als $\frac{1}{3}$. Weiter läßt sich hier noch nicht gehen, und weil wir den wahren Werth noch nicht wissen, so wollen wir für denselben den Buchstaben x gebrauchen, also, daß log. $2 = x$, und zeigen, wenn derselbe gefunden wäre, wie man daraus von unzählig vielen andern Zahlen die Logarithmen finden könne; wozu die oben gegebene Gleichung dienet log. $cd =$ log. $c +$ log. d, oder daß der Logarithmus von einem Product gefunden werde, wenn man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt. (§. 225).

§. 237.

Da nun log. $2 = x$, und log. $10 = 1$, so bekommen wir log. $20 = x + 1$, und log. $200 = x + 2$, ferner log. $2000 = x + 3$, weiter log. $20000 = x + 4$ und log. $200000 = x + 5$ u. s. f.

§. 238.

Da ferner $\log. c^2 = 2 \log. c$ und $\log. c^3 = 3 \log. c$, $\log. c^4 = 4 \log. c$ u. s. f. so erhalten wir daher $\log. 4 = 2x$, $\log. 8 = 3x$, $\log. 16 = 4x$, $\log. 32 = 5x$, $\log. 64 = 6x$ u. s. f.

Hieraus erhalten wir ferner $\log. 40 = 2x + 1$, $\log. 400 = 2x + 2$, $\log. 4000 = 2x + 3$, $\log. 40000 = 2x + 4$ u. s. f.

$\log. 80 = 3x + 1$, $\log. 800 = 3x + 2$, $\log. 8000 = 3x + 3$, $\log. 80000 = 3x + 4$ u. s. f.

$\log. 160 = 4x + 1$, $\log. 1600 = 4x + 2$, $\log. 16000 = 4x + 3$, $\log. 160000 = 4x + 4$ u. s. f.

§. 239.

Da ferner gefunden worden $\log. \frac{c}{d} = \log. c - \log. d$, so setze man $c = 10$, und $d = 2$, und weil $\log. 10 = 1$ und $\log. 2 = x$, so bekommen wir $\log. \frac{10}{2}$, das ist $\log. 5 = 1 - x$, daher erhalten wir

$\log. 50 = 2 - x$, $\log. 500 = 3 - x$, $\log. 5000 = 4 - x$ u. s. f.

Ferner $\log. 25 = 2 - 2x$, $\log. 125 = 3 - 3x$, $\log. 625 = 4 - 4x$ u. s. f.

Auf diese Art gelangen wir weiter zu folgenden:

$\log. 250 = 3 - 2x$, $\log. 2500 = 4 - 2x$, $\log. 25000 = 5 - 2x$ u. s. f., ferner

$\log. 1250 = 4 - 3x$, $\log. 12500 = 5 - 3x$, $\log. 125000 = 6 - 3x$ u. s. f., ferner

$\log. 6250 = 5 - 4x$, $\log. 62500 = 6 - 4x$, $\log. 625000 = 7 - 4x$ u. s. f.

§. 140.

Hätte man auch den Logarithmus von 3 gefunden, so könnte man daher noch von unendlich vielen andern Zahlen die Logarithmen bestimmen. Wir

wollen

wollen den Buchstaben y für log. 3 setzen, und daher würden wir haben:

log. 30 = y + 1, log. 300 = y + 2, log. 3000 = y + 3, u. s. f.
log. 9 = 2y, log. 27 = 3y, log. 81 = 4y, log. 243 = 5y, u. s. f.

Daher kann man noch weiter finden:

log. 6 = x + y, log. 12 = 2x + y, log. 18 = x + 2y, imgleichen auch log. 15 = log. 3 + log. 5 = y + 1 — x.

§. 241.

Wir haben oben (§. 41.) gesehen, daß alle Zahlen aus den so genannten Primzahlen durch die Multiplication hervor gebracht werden. Also wenn nur die Logarithmen der Primzahlen bekannt wären, so könnte man daraus die Logarithmen aller andern Zahlen blos durch die Addition finden; als z. B. von der Zahl 210, welche aus folgenden Factoren besteht, 2. 3. 5. 7, wird seyn der Logarithmus = log. 2 + log. 3 + log. 5 + log. 7: eben so, da 360 = 2. 2. 2. 3. 3. 5 = $2^3\,3^2.\,5$, so wird log. 360 = 3 log. 2 + 2 log. 3 + log. 5, woraus erhellet, wie man aus den Logarithmen der Primzahlen die Logarithmen von allen andern Zahlen bestimmen kann. Also bey Verfertigung der Logarithmischen Tabellen hat man nur dafür zu sorgen, daß die Logarithmen der Primzahlen gefunden werden.

XXIII. Capitel.

Von der Art die Logarithmen darzustellen.

§. 242.

Wir haben gesehen, daß der Logarithmus von 2 größer ist als $\frac{3}{10}$ und kleiner als $\frac{1}{3}$; oder daß der Exponent von 10 zwischen diesen zwey Brüchen fal-

len müsse, wenn die Potenz der Zahl 2 gleich werden soll: man mag aber einen Bruch annehmen, was man immer für einen will, so wird die Potenz immer eine Irrationalzahl und entweder größer oder kleiner als 2 seyn, daher sich der Logarithmus von 2 durch keinen solchen Bruch ausdrücken läßt. Man muß sich deswegen begnügen, den Werth desselben durch Annäherungen so genau zu bestimmen, daß der Fehler unmerklich werde. Hierzu bedient man sich der so genannten Decimalbrüche, deren Natur und Beschaffenheit deutlicher erklärt zu werden verdient.

§. 243.

Man weiß, daß bey der gewöhnlichen Art, alle Zahlen mit den zehn Ziffern

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

zu schreiben, dieselben nur auf der ersten Stelle zur rechten Hand ihre natürliche Bedeutung haben, und daß auf der zweyten Stelle ihre Bedeutung 10 mal größer werde, auf der dritten aber 100 mal, auf der vierten 1000 mal u. s. f. auf einer jeden folgenden Stelle 10 mal größer, als auf der vorhergehenden.

Also in dieser Zahl 1765 steht auf der ersten Stelle zur Rechten die Ziffer 5, die auch wirklich 5 bedeutet, auf der zweyten Stelle steht 6, welche aber nicht 6, sondern 10. 6 oder 60 anzeigt; die Ziffer 7 auf der dritten Stelle bedeutet 100. 7 oder 700, und endlich das 1 auf der vierten Stelle bedeutet 1000, und so wird auch diese Zahl ausgesprochen, indem man sagt:

Ein Tausend, Sieben Hundert, Sechzig, und Fünf.

§. 244.

Wie nun von der Rechten zur Linken die Bedeutung der Ziffern immer 10 mal größer und folglich

von

von der Linken zur Rechten immer 10 mal kleiner wird, so kann man nach diesem Gesetz noch weiter gehen und gegen die rechte Hand fortrücken, da denn die Bedeutung der Ziffern immer fort 10 mal kleiner wird. Hier muß man aber die Stelle wohl bemerken, wo die Ziffern ihren natürlichen Werth haben. Dieses geschieht durch ein Comma, welches hinter diese Stelle gesetzt wird. Wenn man daher folgende Zahl findet, als 36, 54892, so ist dieselbe also zu verstehen: erstlich hat die Ziffer 6 ihre natürliche Bedeutung, und die Ziffer 3 auf der zweyten Stelle von der Rechten 30. Aber nach dem Comma bedeutet die Ziffer 5 nur $\frac{5}{10}$, die folgenden 4 sind $\frac{4}{100}$, die Ziffer 8 bedeutet $\frac{8}{1000}$, die Ziffer 9, $\frac{9}{10000}$ und die Ziffer 2, $\frac{2}{100000}$; woraus man sieht, daß je weiter diese Ziffern nach der rechten Hand fortgesetzt werden, ihre Bedeutungen immer kleiner und endlich so klein werden, daß sie für nichts zu achten sind.

§. 245.

Diese Art, die Zahlen auszudrücken, heißt nun ein Decimalbruch, und auf diese Art werden auch die Logarithmen in den Tabellen dargestellt. Daselbst wird z. B. der Logarithmus von 2 also ausgedrückt: 0,3010300. Folglich ist hierbey zu merken, daß, weil vor dem Comma 0 steht, dieser Logarithmus auch kein Ganzes betrage, und daß sein Werth $\frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{0}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{0}{1000000} + \frac{0}{10000000}$ sey. Man hätte also wohl die zwey hintersten 0 weglassen können, allein dieselben dienen, um zu zeigen, daß von diesen Theilchen wirklich keine vorhanden sind. Hierdurch wird aber nicht behauptet, daß nicht weiterhin noch kleinere Theilchen folgen sollten, aber diese werden wegen ihrer Kleinheit für nichts geachtet.

§. 246.

Den Logarithmus von 3 findet man also ausgedrückt: 0,4771213; woraus man sieht, daß derselbe kein Ganzes betrage, sondern daß er aus diesen Brüchen bestehe:

$$\frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{2}{100000} + \frac{1}{1000000} + \frac{3}{10000000}.$$

Man muß aber nicht glauben, daß dieser Logarithmus auf diese Art ganz genau ausgedrückt sey. Doch aber weiß man so viel, daß der Fehler gewiß kleiner ist als $\frac{1}{10000000}$, welcher auch wirklich so klein ist, daß man ihn in den meisten Rechnungen aus der Acht lassen kann.

§. 247.

Nach dieser Art heißt der Logarithmus von 1 also 0,0000000, weil derselbe wirklich 0 ist; von 10 aber heißt der Logarithmus 1,0000000, woraus man erkennt, daß derselbe gerade 1 sey. Von 100 aber ist der Logarithmus 2,0000000, oder gerade 2, woraus man sehen kann, daß von den Zahlen zwischen 10 und 100, oder welche mit zwey Ziffern geschrieben werden, die Logarithmen zwischen 1 und 2 enthalten seyn müssen, und folglich durch 1 und einen Decimalbruch ausgedrückt werden. Also ist log. 50 = 1, 6989700, derselbe ist also 1 und noch überdies $\frac{6}{10} + \frac{9}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{7}{100000}$. Von den Zahlen aber über hundert bis 1000 enthalten die Logarithmen 2 nebst einem Decimalbruch, als log. 800 = 2, 9030900. Von 1000 bis 10000 sind die Logarithmen größer als 3. Von 10000 bis 100000 größer als 4 u. s. f.

§. 248.

Von den Zahlen unter 10 aber, welche nur mit einer Ziffer geschrieben werden, ist der Logarithmus noch kein Ganzes, und deswegen steht vor dem Comma eine 0. Bey einem jeden Logarithmus sind also zwey Theile zu bemerken. Der erste Theil, den man die Charakteristik oder Kennziffer zu nennen pflegt, steht vor dem Comma und zeigt die Ganzen an, wenn dergleichen vorhanden sind; der andere Theil aber zeigt die Decimalbrüche an, die zu dem Ganzen noch gesetzt werden müssen, und wird Mantisse genannt. Also ist es leicht, den ersten oder ganzen Theil des Logarithmus einer jeden Zahl anzugeben, weil derselbe 0 ist für alle Zahlen, die nur aus einer Ziffer bestehen. Für die Zahlen, die aus 2 Ziffern bestehen, ist derselbe 1. Er ist ferner 2 für diejenigen, so aus 3 Ziffern bestehen, und so fort ist derselbe immer um eins kleiner als die Anzahl der Ziffern. Wenn man also den Logarithmus von 1766 verlangt, so weiß man schon, daß der erstere oder ganze Theil davon 3 seyn muß.

§. 249.

Umgekehrt also, sobald man den ersten Theil eines Logarithmus ansieht, so weiß man, aus wie viel Figuren die Zahl selbst bestehen werde, weil die Anzahl der Figuren immer um eins größer ist als der ganze Theil des Logarithmus. Wenn man also für eine unbekannte Zahl diesen Logarithmus gefunden hätte 6, 4771213, so wüßte man sogleich, daß dieselbe Zahl aus 7 Figuren bestehe und also größer seyn müsse als 1000000. Diese Zahl ist auch wirklich 3000000: denn log. 3000000 = log. 3 + log. 1000000. Nun aber ist log. 3 = 0, 4771213

und log. 1000000 = 6, welche zwey Logarithmen zusammen addirt 6, 4771213 geben.

§. 250.

Bey einem jeden Logarithmus kommt also die Hauptsache auf den nach dem Comma folgenden Decimalbruch an, und wenn dieser einmal bekannt ist, so kann er für viele Zahlen dienen. Um dieses zu zeigen, wollen wir den Logarithmus der Zahl 365 betrachten, dessen erster Theil unstreitig 2 ist; für den andern Theil aber, nemlich den Decimalbruch, wollen wir der Kürze halber den Buchstaben x schreiben, also daß log. 365 = 2 + x; hieraus erhalten wir, wenn wir immerfort mit 10 multipliciren, log. 3650 = 3 + x; log. 36500 = 4 + x; log. 365000 = 5 + x. Wir können auch zurück gehen und immer durch 10 dividiren, so bekommen wir log. 36, 5 = 1 + x; log. 3, 65 = 0 + x; log. 0, 365 = − 1 + x; log. 0, 0365 = − 2 + x; log. 0, 00365 = − 3 + x u. s. f.

§. 251.

Bey den Logarithmen aller dieser Zahlen nun, welche aus den Ziffern 365 entstehen, sie mögen 0 hinter oder vor sich haben, bleibt einerley Decimalbruch in ihren Logarithmen und der Unterschied befindet sich nur in der ganzen Zahl vor dem Comma, und wie wir gesehen haben, so kann diese auch negativ werden, wenn nemlich die Zahl kleiner als 1 wird. Weil nun die gemeinen Rechner nicht gut mit den negativen Zahlen umgehen können, so wird in diesen Fällen die ganze Zahl der Logarithmen um 10 vermehret, und anstatt 0 vor dem Comma, pflegt man 10 zu schreiben, da man denn 9 anstatt — 1 bekommt; anstatt — 2 bekommt man 8; anstatt — 3 bekommt man 7 u. s. f. Hier muß aber gar nicht aus der Acht gelassen werden, daß die ganzen

Zahlen

Zahlen vor dem Comma um 10 zu groß angenommen worden, damit man nicht schließe, die Zahl bestehe aus 10 oder 9 oder 8 Figuren, sondern daß die Zahl erst nach dem Comma entweder auf der ersten Stelle, wenn 9 vorhanden, oder auf der zweyten Stelle, wenn 8 vorhanden, oder gar erst auf der dritten, wenn 7 vom Anfang des Logarithmus steht, zu schreiben angefangen werden muß. Auf solche Art findet man die Logarithmen der Sinus in den Tabellen vorgestellt.

§. 252.

In den gewöhnlichen Tabellen bestehen die Decimalbrüche für die Logarithmen in sieben Figuren, wovon also die letzte $\frac{1}{10000000}$ Theile andeutet, und man kann sicher seyn, daß dieselben um kein einziges solches Theilchen von der Wahrheit abweichen, welcher Fehler gemeiniglich nichts zu bedeuten hat. Wollte man aber noch genauer rechnen, so müßten die Logarithmen in noch mehr als sieben Figuren vorgestellt werden, welches in den großen Vlacqschen Tabellen geschieht, wo die Logarithmen auf zehn Figuren berechnet sind.

§. 253.

Weil der erste Theil eines Logarithmus keine Schwierigkeit hat, so wird derselbe in den Tabellen nicht gesetzt oder angezeigt, sondern man findet daselbst nur die sieben Figuren des Decimalbruchs, welche den zweyten Theil ausmachen. In den englischen Tabellen findet man dieselben für alle Zahlen bis auf 100000 ausgedrückt und wenn größere Zahlen noch vorkommen, so sind kleine Täfelchen beygefügt, woraus man ersehen kann, wie viel wegen der folgenden Figuren noch zu den Logarithmen addirt werden müsse.

§. 254.

Hieraus ist also leicht zu verstehen, wie man aus einem gefundenen Logarithmus hinwiederum die ihm zukommende Zahl aus den Tabellen nehmen soll. Um die Sache besser zu erläutern, so wollen wir z. B. diese Zahlen 343 und 2401 mit einander multipliciren. Da nun die Logarithmen davon addirt werden müssen, so kommt die Rechnung also zu stehen:

log. 343 = 2, 5352941
log. 2401 = 3, 3803922 } addirt

5, 9156863
6847 } subtrahirt

Giebt also 823543. 16

Diese Summe ist nun der Logarithmus des gesuchten Products, und aus seinem ersten Theil 5 erkennen wir, daß das Product aus 6 Figuren bestehe, welche aus dem Decimalbruch vermittelst der Tabelle gefunden worden 823543, und dieses ist wirklich das gesuchte Product.

§. 255.

Da bey Ausziehung der Wurzeln die Logarithmen besonders einen wichtigen Vortheil leisten, so wollen wir auch dieses mit einem Exempel erläutern. Es soll aus der Zahl 10 die Quadratwurzel gefunden werden. Da hat man also nur nöthig den Logarithmus von 10, welcher 1, 0000000 ist, durch 2 zu dividiren, so wird der Quotient 0, 5000000, der Logarithmus der gesuchten Wurzel seyn. Daher die Wurzel selbst aus den Tabellen 3, 16228 gefunden wird, wovon auch wirklich das Quadrat nur um $\frac{1}{100000}$ Theilchen größer ist als 10.

Ende des ersten Abschnitts.

Des

Ersten Theils

Zweyter Abschnitt.

Von

den verschiedenen Rechnungsarten mit zusammengesetzten Größen.

Des

Ersten Theils

Zweyter Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungsarten mit zusammengesetzten Größen.

I. Capitel.

Von der Addition zusammengesetzter Größen.

§. 256.

Wenn zwey oder mehr Formeln, welche aus vielen Gliedern bestehen, zusammen addirt werden sollen, so pflegt man die Addition zuweilen nur durch gewisse Zeichen anzudeuten, indem man eine jede Formel in Klammern einschließt und dieselben mit dem Zeichen + verbindet. Also wenn die Formeln $a + b + c$ und $d + e + f$ zusammen addirt werden sollen, so wird die Summe also angezeigt:

$$(a + b + c) + (d + e + f).$$

§. 257.

Auf diese Art wird die Addition nur angedeutet, nicht aber vollzogen. Es ist aber leicht einzusehen, daß, um dieselbe zu vollziehen, nur nöthig ist, die Klammern wegzulassen: denn da die Zahl $d + e + f$, zur

zur ersten addirt werden soll, so geschieht solches, wenn man erstlich $+d$, hernach $+e$, und endlich $+f$ hinzuschreibt, da denn die Summe seyn wird:

$$a + b + c + d + e + f.$$

Eben dieses würde auch zu beobachten seyn, wenn einige Glieder das Zeichen — hätten, welche dann gleichfalls mit ihrem Zeichen hinzu geschrieben werden müßten.

§. 258.

Um dieses deutlicher zu machen, wollen wir ein Exempel in bloßen Zahlen betrachten, und zu der Formel $12 - 8$ noch diese $15 - 6$ addiren.

Man addire also erstlich 15, so hat man $12 - 8 + 15$; man hat aber zu viel addirt, weil man nur $15 - 6$ addiren sollte, und es ergiebt sich, daß man 6 zu viel addirt habe; man nehme also diese 6 wieder weg oder schreibe sie mit ihrem Zeichen dazu, so hat man die wahre Summe:

$$12 - 8 + 15 - 6.$$

Hieraus erhellet, daß man die Summe findet, wenn man alle Glieder, jedes mit seinem Zeichen, an einander schreibt.

§. 259.

Wenn daher zu dieser Formel $a - b + c$ noch diese $d - e - f$ addirt werden soll, so wird die Summe folgendergestalt ausgedrückt:

$$a - b + c + d - e - f.$$

Es ist aber hierbey wohl zu bemerken, daß es hier gar nicht auf die Ordnung der Glieder ankomme, sondern daß dieselben nach Belieben unter einander versezt werden können, wenn nur ein jedes sein ihm vorgesetztes Zeichen behält. Also könnte die obige Summe auch auf folgende Art geschrieben werden:

$$c - e + a - f + d - b.$$

§. 260.

Folglich hat die Addition nicht die geringste Schwierigkeit, wie auch immer die Glieder aussehen mögen. Also wenn zu dieser Formel $2a^3 + 6\sqrt{b} - 4\log.c$ noch diese $5\sqrt[5]{a} - 7c$ addirt werden sollte, so würde die Summe seyn:

$$2a^3 + 6\sqrt{b} - 4\log.c + 5\sqrt[5]{a} - 7c;$$

woraus erhellet, daß dieses die Summe sey, und es auch erlaubt ist, diese Glieder nach Belieben unter einander zu versetzen, wenn nur ein jedes sein Zeichen behält.

§. 261.

Es ist aber oft der Fall, daß die solchergestalt gefundene Summe weit kürzer zusammen gezogen werden kann, indem zuweilen zwey oder mehr Glieder sich gänzlich aufheben, z. B. wenn in der Summe diese Glieder $+a - a$, oder solche $3a - 4a + a$ vorkämen. Auch können bisweilen zwey oder mehrere Glieder in eins gebracht werden, wie z. B.

$3a + 2a = 5a$; $7b - 3b = +4b$; $-6c + 10c = +4c$
$5a - 8a = -3a$; $-7b + b = -6b$; $-3c - 4c = -7c$;
$2a - 5a + a = -2a$; $-3b - 5b + 2b = -6b$.

Diese Abkürzung findet also statt, so oft zwey oder mehr Glieder in Ansehung der Buchstaben völlig einerley sind. Hingegen $2a^2 + 3a$ läßt sich nicht zusammen ziehen, eben so wenig als sich $2b^3 - b^4$ abkürzen läßt.

§. 262.

Wir wollen also einige Exempel von dieser Art betrachten. Erstlich sollen diese zwey Formeln addirt werden $a + b$ und $a - b$, da denn nach obiger Regel herauskommt $a + b + a - b$; nun aber ist $a + a$

$= 2a$ und $b - b = 0$, folglich ist die Summe $= 2a$. Aus diesem Exempel erhellt folgende sehr nützliche Wahrheit:

Wenn zu der Summe zweyer Zahlen $(a+b)$ ihre Differenz $(a-b)$ addirt wird, so kommt die größere Zahl doppelt heraus.

Man betrachte zur Uebung noch folgende Exempel:

$3a - 2b - c$	$a^3 - 2a^2b + 2ab^2$
$5b - 6c + a$	$-a^2b + 2ab^2 - b^3$
$4a + 3b - 7c$	$a^3 - 3a^2b + 4ab^2 - b^3$

$$\begin{array}{r} 3a - 2b + c - 12m \\ 5a + 4b - 3c + 6m \\ -7a + 5b - 7c + 2m \\ 2a - 7b + 9c - 5f \\ \hline 3a - 4m - 5f \end{array}$$

II. Capitel.

Von der Subtraction zusammengesetzter Größen.

§. 263.

Wenn man die Subtraction nur andeuten will, so schließt man eine jede Formel in Klammern ein, und diejenige, welche abgezogen werden soll, wird mit Vorsetzung des Zeichen $-$ an diejenige angehänget, von welcher sie abgezogen werden soll. Z. B. wenn von dieser Formel $a - b + c$ diese $d - e + f$ abgezogen werden soll, so wird der gesuchte Rest also angedeutet:

$$(a - b + c) - (d - e + f)$$

woraus man ersehen kann, daß die letztere Formel von der ersten abgezogen werden soll.

§. 264.

§. 264.

Um aber die Subtraction wirklich zu vollziehen, so ist fürs erste zu merken, daß, wenn von einer Größe als a eine andere positive Größe als + b abgezogen werden soll, man a — b bekommen werde.

Soll hingegen eine negative Zahl als — b von a abgezogen werden, so wird man bekommen a + b, weil eine Schuld wegnehmen eben so viel ist als etwas schenken.

§. 265.

Laßt uns nun annehmen, man soll von dieser Formel a — c, diese b — d subtrahiren; so nehme man erstlich b weg, welches a — c — b giebt; wir haben aber zu viel weggenommen, denn wir sollten nur b — d wegnehmen, und zwar um d zu viel: wir müssen also d wieder hinzusetzen, da wir denn erhalten:

$$a - c - b + d,$$

woraus sich deutlich folgende Regel ergiebt: daß die Glieder derjenigen Formel, welche subtrahirt werden sollen, mit verkehrten Zeichen hinzugeschrieben werden müssen.

§. 266.

Mit Hülfe dieser Regel ist es also ganz leicht, die Subtraction zu verrichten, indem die Formel, von welcher subtrahirt werden soll, ordentlich hingeschrieben, diejenige Formel aber, welche subtrahirt werden soll, mit umgekehrten oder verwechselten Zeichen angehänget wird. Da also im ersten Exempel von a — b + c diese Formel d — e + f abgezogen werden soll, so bekommt man:

$$a - b + c - d + e - f.$$

Um dieses mit bloßen Zahlen zu erläutern, so subtrahire man von $9-3+2$, diese Formel $6-2+4$, da man denn bekömmt:

$$9-3+2-6+2-4=0.$$

welches auch sogleich in die Augen fällt; denn $9-3+2=8$, $6-2+4=8$, und $8-8=0$.

§. 267.

Da nun die Subtraction selbst weiter keine Schwierigkeit hat, so ist nur noch übrig zu bemerken, daß, wenn in dem gefundenen Rest zwey oder mehr Glieder vorkommen, welche in Ansehung der Buchstaben einerley sind, die Abkürzung nach eben denselben Regeln vorgenommen werden könne, welche oben bey der Addition gegeben worden.

§. 268.

Soll von $a+b$, wodurch die Summe zweyer Zahlen angedeutet wird, ihre Differenz $a-b$ subtrahiret werden, so bekommt man erstlich $a+b-a+b$; nun aber ist $a-a=0$ und $b+b=2b$, folglich ist der gesuchte Rest $2b$, das ist die kleinere Zahl b doppelt genommen.

§. 269.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch einige Exempel beyfügen:

a^2+ab+b^2	$3a-4b+5c$
a^2-ab+b^2	$-6a+2b+4c$
$2ab$	$9a-6b+c$

$$\begin{array}{c} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\ \hline 6a^2b+2b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{a} + 2\sqrt{b} \\ \sqrt{a} - 3\sqrt{b} \\ \hline + 5\sqrt{b} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12a + 4b - 3m - 8f + 2c \\ 6a - 9b + 2m - 3f + 7d \\ \hline 6a + 13b - 5m - 5f + 2c - 7d \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{a} + 2\sqrt{b} - 8\sqrt{n} + \sqrt{c} \\ \sqrt{a} - 3\sqrt{b} - 12\sqrt{n} - \sqrt{c} \\ \hline 5\sqrt{b} + 4\sqrt{n} + 2\sqrt{c} \end{array}$$

Zusatz. Will man die Richtigkeit einer solchen Rechnung prüfen, so darf man nur auf die gewöhnliche Art den gefundenen Rest zu der subtrahirten Zahl addiren, und sehen, ob die Summe derjenigen Zahl oder Formel gleich sey, von welcher subtrahirt worden.

III. Capitel.

Von der Multiplication zusammengesetzter Größen.

§. 270.

Wenn die Multiplication zusammengesetzter Größen bloß angezeigt werden soll, so wird eine jede von den Formeln, welche mit einander multiplicirt werden sollen, in Klammern eingeschlossen, und entweder ohne Zeichen oder mit einem dazwischen gesetzten Punkt an einander gehängt.

Also wenn diese beyde Formeln $a - b + c$ und $d - e + f$ mit einander multiplicirt werden sollen, so wird das Product auf folgende Art angezeigt: $(a-b+c).(d-e+f)$ oder $(a-b+c)(d-e+f)$.

Diese Art wird sehr häufig gebraucht, weil man daraus sogleich sieht, aus was für Factoren ein solches Product zusammen gesetzt ist.

Zusatz. Statt der Klammern bedienen sich einige auch eines Querstrichs, der über die Größen gesetzt wird, die zusammen genommen einen Factor ausmachen; z. B.

$$\overline{a - b + c} \,.\, \overline{d - e + f}$$

§. 271.

Um aber zu zeigen, wie eine solche Multiplication wirklich angestellt werden müsse, so ist erstlich zu merken, daß, wenn eine solche Formel $a - b + c$, z. B. mit 2 multiplicirt werden soll, ein jedes Glied derselben besonders mit 2 multiplicirt werden müsse, und also herauskommen werde:

$$2a - 2b + 2c.$$

Eben dies gilt auch von allen andern Zahlen. Wenn also dieselbe Formel mit d multiplicirt werden soll, so bekommt man:

$$ad - bd + cd.$$

§. 272.

Hier haben wir vorausgesetzt, daß die Zahl d positiv sey: wenn aber mit einer negativen Zahl als $-e$ multiplicirt werden soll, so ist die oben (§. 32) gegebene Regel zu beobachten, daß nemlich zwey ungleiche Zeichen multiplicirt $-$, zwey gleiche aber $+$ geben. Daher bekommt man:

$$-ae + be - ce.$$

§. 273.

Um nun zu zeigen, wie eine Formel, sie mag einfach oder zusammengesetzt seyn, als A, durch eine zusammengesetzte, als $d - e$, multiplicirt werden soll, so wollen wir erstlich bloße Zahlen betrachten, und

anneh-

annehmen, daß A mit 7 — 3 multiplicirt werden solle. Hier ist nun klar, daß man das vierfache von A verlange; nimmt man nun erstlich das siebenfache, so muß man hernach das dreyfache davon subtrahiren. Also auch überhaupt, wenn man mit d — e multiplicirt, so multiplicirt man die Formel A erstlich mit d und hernach mit e und subtrahirt das letztere Product von dem erstern, also daß herauskommt dA—eA. Laßt uns nun setzen A = a — b, welches mit d — e multiplicirt werden soll, so erhalten wir:

$$dA = ad - bd$$
$$eA = ae - be$$
$$\overline{\quad ad - bd - ae + be}$$

welches das verlangte Product ist.

§. 274.

Da wir nun das Product (a — b).(d — e) gefunden haben, und von der Richtigkeit desselben überzeugt sind, so wollen wir dieses Multiplications-Exempel folgendergestalt deutlich vor Augen stellen:

$$a - b$$
$$\underline{d - e}$$
$$ad - bd - ae + be$$

woraus wir sehen, daß ein jedes Glied der obern Formel mit einem jeden der untern multiplicirt werden müsse, und daß wegen der Zeichen die oben gegebene Regel durchaus Statt habe, und hierdurch von neuem bestätiget werde, wenn etwa jemand noch irgend einen Zweifel darüber gehabt hätte.

§. 275.

Nach dieser Regel wird es also leicht seyn, folgendes Exempel auszurechnen; a + b soll multiplicirt werden mit a — b:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline aa + ab \\ - ab - bb \\ \hline \end{array}$$

das Product wird seyn $aa - bb$

§. 276.

Wenn also für a und b nach Belieben bestimmte Zahlen gesetzt werden, so leitet uns dieses Exempel auf folgende Wahrheit: wenn die Summe zweyer Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt wird, so ist das Product die Differenz ihrer Quadrate; dies kann auf folgende Art vorgestellt werden:

$$(a + b)(a - b) = aa - bb.$$

Folglich ist wiederum die Differenz zwischen zwey Quadratzahlen immer ein Product, oder sie läßt sich so wohl durch die Summe als durch die Differenz der Wurzeln theilen, und ist also keine Primzahl.

§. 277.

Wir wollen nun noch ferner folgende Exempel ausrechnen:

I.)
$$\begin{array}{r} 2a - 3 \\ a + 2 \\ \hline 2a^2 - 3a \\ + 4a - 6 \\ \hline 2a^2 + a - 6 \end{array}$$

II.)
$$\begin{array}{r} 4a^2 - 6a + 9 \\ 2a + 3 \\ \hline 8a^3 - 12a^2 + 18a \\ + 12a^2 - 18a + 27 \\ \hline 8a^3 + 27 \end{array}$$

III.)
$$\begin{array}{r} 3a^2 - 2ab - b^2 \\ 2a - 4b \\ \hline 6a^3 - 4a^2b - 2ab^2 \\ - 12a^2b + 8ab^2 + 4b^3 \\ \hline 6a^3 - 16a^2b + 6ab^2 + 4b^3 \end{array}$$

IV.)
$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + 2b^2 \\ a^2 - 2ab + 2b^2 \\ \hline a^4 + 2a^3b + 2a^2b^2 \\ - 2a^3b - 4a^2b^2 - 4ab^3 \\ + 2a^2b^2 + 4ab^3 + 4b^4 \\ \hline a^4 + 4b^4. \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
\text{V.)}\ 2a^2 - 3ab - 4b^2 \\
\quad 3a^2 - 2ab + b^2 \\
\hline
6a^4 - 9a^3b - 12a^2b^2 \\
\quad - 4a^3b + 6a^2b^2 + 8ab^3 \\
\quad\quad + 2a^2b^2 - 3ab^3 - 4b^4. \\
\hline
6a^4 - 13a^3b - 4a^2b^2 + 5ab^3 - 4b^4.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\text{VI.)}\ a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \\
\quad a + b + c \\
\hline
a^3 + ab^2 + ac^2 - a^2b - a^2c - abc \\
\quad - ab^2 - ac^2 + a^2b + a^2c - abc + b^3 + bc^2 - b^2c \\
\quad\quad - abc \quad - bc^2 + b^2c + c^3 \\
\hline
a^3 - 3abc + b^3 + c^3.
\end{array}
$$

§. 278.

Wenn mehr als zwey Formeln mit einander multiplicirt werden sollen, so begreift man leicht, daß, nachdem man zwey davon mit einander multiplicirt hat, das Product nach und nach auch durch die übrigen multiplicirt werden müsse, und daß es gleichviel sey, was für eine Ordnung darin beobachtet werde. Es soll z. B. folgendes Product, welches aus vier Factoren besteht, gefunden werden:

$$
\begin{array}{cccc}
\text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} \\
(a+b) & (a^2+ab+b^2) & (a-b) & (a^2-ab+b^2)
\end{array}
$$

so multiplicirt man erstlich den I. und II. Factor:

$$
\begin{array}{l}
\text{II.}\ a^2 + ab + b^2 \\
\text{I.}\ a + b \\
\hline
a^3 + a^2b + ab^2 \\
\quad + a^2b + ab^2 + b^3 \\
\hline
\text{I. II.}\ a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3
\end{array}
$$

Hernach multiplicirt man den III. und IV. Factor:

$$\begin{array}{rl}
\text{IV.} & a^2 - ab + b^2 \\
\text{III.} & a - b \\
\hline
 & a^3 - a^2b + ab^2 \\
 & \quad - a^2b + ab^2 - b^3 \\
\hline
\text{III. IV.} & a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3
\end{array}$$

Nun ist nur noch übrig jenes Product I. II. mit diesem III. IV. zu multipliciren:

$$\begin{array}{rl}
\text{I. II.} = & a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
\text{III. IV.} = & a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3 \\
\hline
 & a^6 + 2a^5b + 2a^4b^2 + a^3b^3 \\
 & \quad - 2a^5b - 4a^4b^2 - 4a^3b^3 - 2a^2b^4 \\
 & \quad\quad + 2a^4b^2 + 4a^3b^3 + 4a^2b^4 + 2ab^5 \\
 & \quad\quad\quad - a^3b^3 - 2a^2b^4 - 2ab^5 - b^6 \\
\hline
 & a^6 - b^6
\end{array}$$

dieses ist nun das gesuchte Product.

§. 279.

Wir wollen nun bey eben diesem Exempel die Ordnung verändern und erstlich die I. Formel mit der III. und dann die II. mit der IV. multipliciren:

$$\begin{array}{rl}
\text{I.} & a + b \\
\text{III.} & a - b \\
\hline
 & a^2 + ab \\
 & \quad - ab - b^2 \\
\hline
\text{I. III.} = & a^2 - b^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\text{II.} & a^2 + ab + b^2 \\
\text{IV.} & a^2 - ab + b^2 \\
\hline
 & a^4 + a^3b + a^2b^2 \\
 & \quad - a^3b - a^2b^2 - ab^3 \\
 & \quad\quad + a^2b^2 + ab^3 + b^4 \\
\hline
\text{II. IV.} = & a^4 + a^2b^2 + b^4
\end{array}$$

Nun muß nur noch das Product II. IV. mit dem I. III. multiplicirt werden:

$$\begin{array}{l} \text{II. IV.} = a^4 + a^2b^2 + b^4 \\ \text{I. III.} = a^2 - b^2 \\ \hline a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 \\ \quad - a^4b^2 - a^2b^4 - b^6 \\ \hline a^6 - b^6 \end{array}$$

welches das gesuchte Product ist.

§. 280.

Endlich wollen wir die Rechnung noch nach einer dritten Ordnung anstellen und erstlich die I. Formel mit der IV. und hernach die II. mit der III. multipliciren:

$$\begin{array}{ll} \text{IV. } a^2 - ab + b^2 & \text{II. } a^2 + ab + b^2 \\ \text{I. } a + b & \text{III. } a - b \\ \hline a^3 - a^2b + ab^2 & a^3 + a^2b + ab^2 \\ \quad + a^2b - ab^2 + b^3 & \quad - a^2b - ab^2 - b^3 \\ \hline \text{I. IV.} = a^3 + b^3 & \text{II. III.} = a^3 - b^3 \end{array}$$

Nun ist noch übrig das Product I. IV. mit II. III. zu multipliciren:

$$\begin{array}{l} \text{I. IV.} = a^3 + b^3 \\ \text{II. III.} = a^3 - b^3 \\ \hline a^6 + a^3b^3 \\ \quad - a^3b^3 - b^6 \\ \hline a^6 - b^6. \end{array}$$

§. 281.

Es ist wohl der Mühe werth dieses Exempel mit Zahlen zu erläutern. Es sey daher $a = 3$ und $b = 2$, so hat man $a + b = 5$ und $a - b = 1$; ferner $a^2 = 9$, $ab = 6$, $b^2 = 4$. Also ist $a^2 + ab + b^2 = 19$ und $a^2 - ab + b^2 = 7$. Folglich wird dieses Product verlangt:

$5 \cdot 19 \cdot 1 \cdot 7$. welches ist 665.

Es ist aber $a^6 = 729$ und $b^6 = 64$, folglich $a^6 - b^6 = 665$, wie wir schon vorher gesehen haben.

IV. Ca-

IV. Capitel.

Von der Division zusammengesetzter Größen.

§. 282.

Wenn man die Division nur anzeigen will, so bedient man sich entweder des gewöhnlichen Zeichen eines Bruchs, indem man den Dividendus über die Linie und den Divisor unter die Linie schreibt; oder man schließt beyde in Klammern ein, und schreibt den Divisor nach dem Dividendus mit dazwischen gesetzten zwey Puncten. Also wenn $a + b$ durch $c + d$ getheilt werden soll, so wird der Quotient nach der ersten Art also angezeigt $\frac{a+b}{c+d}$.

Nach der andern Art aber durch $(a+b):(c+d)$; beydes wird ausgesprochen $a+b$ getheilt durch $c+d$.

§. 283.

Wenn eine zusammengesetzte Formel durch eine einfache getheilt werden soll, so wird ein jedes Glied besonders getheilt, z. B.

$6a - 8b + 4c$ durch 2 getheilt, giebt $3a - 4b + 2c$
und $(a^2 - 2ab) : a = a - 2b$:
Eben so $(a^3 - 2a^2b + 3ab^2) : a = a^2 - 2ab + 3b^2$;
ferner $(4a^2b - 6a^2c + 8abc) : 2a = 2ab - 3ac + 4bc$;
und $(9a^2bc - 12ab^2c + 15abc^2) : 3abc = 3a - 4b + 5c$.

§. 284.

Wenn sich etwa ein Glied des Dividendus nicht theilen läßt, so wird der daher entstehende Quotient durch einen Bruch angezeigt. Also wenn $a + b$ durch a getheilt werden soll, so bekommt man zum Quotienten $1 + \frac{b}{a}$.

Ferner $(a^2 - ab + b^2) : a^2 = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}$.

Wenn ferner $(2a + b)$ durch 2 getheilt werden soll, so bekommt man $a + \frac{b}{2}$; wobey zu merken, daß anstatt $\frac{b}{2}$ auch geschrieben werden kann $\frac{1}{2}b$, weil $\frac{1}{2}$mal b so viel ist als $\frac{b}{2}$. Eben so ist $\frac{b}{3}$ so viel als $\frac{1}{3}b$ und $\frac{2b}{3}$ so viel als $\frac{2}{3}b$ u. s. f.

§. 285.

Wenn aber der Divisor selbst eine zusammengesetzte Größe ist, so hat die Division mehr Schwierigkeit, weil dieselbe öfters wirklich geschehen kann, wo es nicht zu vermuthen scheint; denn wenn die Division nicht angeht, so muß man sich begnügen, den Quotienten, wie oben schon gezeigt ist, durch einen Bruch anzudeuten; wir wollen daher hier nur solche Fälle betrachten, wo die Division wirklich angeht.

§. 286.

Es soll demnach der Dividendus $ac - bc$ durch den Divisor $a - b$ getheilt werden; der Quotient muß daher also beschaffen seyn, daß, wenn der Divisor $a - b$ damit multiplicirt wird, der Dividendus $ac - bc$ herauskomme. Man sieht nun leicht, daß in dem Quotienten c stehen muß, weil sonst nicht ac herauskommen könnte. Um nun zu sehen, ob c der völlige Quotient ist, so darf man nur den Divisor damit multipliciren und sehen, ob der ganze Dividendus herauskomme oder nur ein Theil desselben. Wird aber $a - b$ mit c multiplicirt, so bekommt man $ac - bc$, welches der Dividendus selbst ist: folglich

ist c der völlige Quotient. Eben so ist klar, daß $(a^2+ab):(a+b)=a$, und $(3a^2-2ab):(3a-2b)=a$, ferner $(6a^2-9ab):(2a-3b)=3a$.

§. 287.

Auf diese Art findet man gewiß einen Theil des Quotienten. Denn wenn derselbe mit dem Divisor multiplicirt noch nicht den Dividendus erschöpft, so muß man das übrige gleichfalls noch durch den Divisor theilen, da man denn wiederum einen Theil des Quotienten herausbringt. Solchergestalt verfährt man, bis man den ganzen Quotienten erhält.

Wir wollen z. B. $a^2+3ab+2b^2$ durch $a+b$ theilen; es ist nun sogleich klar, daß der Quotient das Glied a enthalten müsse, weil sonst nicht a^2 heraus kommen könnte. Wenn aber der Divisor $a+b$ mit a multiplicirt wird, so kommt a^2+ab, welches vom Dividendus abgezogen, $2ab+2b^2$ übrig läßt, welches also noch durch $a+b$ getheilt werden muß, und hier fällt sogleich in die Augen, daß im Quotienten $2b$ stehen müsse. Aber $2b$ mit $a+b$ multiplicirt, giebt gerade $2ab+2b^2$; folglich ist der gesuchte Quotient $a+2b$, welches mit dem Divisor $a+b$ multiplicirt, den Dividendus giebt. Dieses ganze Verfahren wird auf folgende Art vorgestellt:

$$\begin{array}{l} a+b)\ a^2+3ab+2b^2\ (a+2b \\ \quad\quad\ \ \underline{a^2+ab} \\ \quad\quad\quad\quad +2ab+2b^2 \\ \quad\quad\quad\quad \underline{+2ab+2b^2} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

§. 288.

Um diese Operation zu erleichtern, so erwählt man einen Theil des Divisors, wie hier geschehen, a, welchen man zuerst schreibt, und nach diesem Buchstaben

staben schreibt man auch den Dividendus in solcher Ordnung, daß die höchsten Potenzen von eben demselben Buchstaben a zuerst gesetzt werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$\begin{array}{l} a-b)\,a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\,(a^2-2ab+b^2 \\ \quad a^3-a^2b \\ \hline \quad -2a^2b+3ab^2 \\ \quad -2a^2b+2ab^2 \\ \hline \quad\quad +ab^2-b^3 \\ \quad\quad +ab^2-b_3 \\ \hline \quad\quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+b)\,a^2-b^2\,(a-b \\ \quad a^2+ab \\ \hline \quad -ab-b^2 \\ \quad -ab-b^2 \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3a-2b)\,18a^2-8b^2\,(6a+4b \\ \quad 18a^2-12ab \\ \hline \quad\quad +12ab-8b^2 \\ \quad\quad +12ab-8b^2 \\ \hline \quad\quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+b)\,a^3+b^3\,(a^2-ab+b^2 \\ \quad a^3+a^2b \\ \hline \quad -a^2b+b^3 \\ \quad -a^2b-ab^2 \\ \hline \quad\quad +ab^2+b_3 \\ \quad\quad +ab^2+b^3 \\ \hline \quad\quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2a-b)\,8a^3-b^3\,(4a^2+2ab+b^2 \\ \quad 8a^3-4a^2b \\ \hline \quad +4a^2b-b^3 \\ \quad +4a^2b-2ab^2 \\ \hline \quad\quad +2ab^2-b^3 \\ \quad\quad +2ab^2-b^2 \\ \hline \quad\quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a^2-2ab+b^2)\,a^4-4a^3b+6^2b^2-4ab^3+b^4\,(a^2-2ab+b^2 \\ \quad a^4-2a^3b+a^2b^2 \\ \hline \quad -2a^3b+5a^2b^2-4ab^3 \\ \quad -2a^3b+4a^2b^2-2ab^3 \\ \hline \quad\quad +a^2b^2-2ab^3+b^4 \\ \quad\quad +a^2b^2-2ab^3+b^4 \\ \hline \quad\quad 0 \end{array}$$

a^2-2ab

$$a^2 - 2ab + 4b^2)\ a^4 + 4a^2b^2 + 16b^4\ (a^2 + 2ab + 4b^2$$
$$a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$$
$$+2a^3b + 16b^4$$
$$+2a^3b - 4a^2b^2 + 8ab^3$$
$$+4a^2b^2 - 8ab^3 + 16b^4$$
$$+4a^2b^2 - 8ab^3 + 16b^4$$
$$0$$

$$a^2 - 2ab + 2b^2)\ a^4 + 4b^4\ (a^2 + 2ab + 2b^2$$
$$a^4 - 2a^3b + 2a^2b^2$$
$$+2a^3b - 2a^2b^2 + 4b^4$$
$$+2a^3b - 4a^2b^2 + 4ab^3$$
$$+2a^2b^2 - 4ab^3 + 4b^4$$
$$+2a^2b^2 - 4ab^3 + 4b^4$$
$$0$$

$$1 - 2x + x^2)\ 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5\ (1 - 3x + 3x^2 - x^3$$
$$1 - 2x + x^2$$
$$-3x + 9x^2 - 10x^3$$
$$-3x + 6x^2 - 3x^3$$
$$+3x^2 - 7x^3 + 5x^4$$
$$+3x^2 - 6x^3 + 3x^4$$
$$-x^3 + 2x^4 - x^5$$
$$-x^3 + 2x^4 - x^5$$
$$0$$

Zusatz. Da der Anfänger die Division immer am schwierigsten findet, so will ich noch folgende 2 Beyspiele hersetzen:

Divisor d	der ganze Dividendus D			der Quotient		
	A	B	C	α	β	γ
$4a^2b^3$	$20a^5b^3$	$-\ 12a^6b^3$	$+\ 24a^3b^4$	$5a^3$	$-\ 3a^4$	$+\ 6ab$

Die Rechnung selbst:

Man suche $A : d = \alpha = 5a^3$
und nun nehme man $\alpha .\ d = 20b^5b^3$,

$$\qquad\qquad B \qquad\qquad C$$
daher $D - ad = -\ 12a^6b^3 + 24a^3b^4 = R.$

Hierauf suche man $B : d = \beta = -\ 3a^4$
und nehme $\beta .\ d = -\ 12a^6b^3$;

$$C$$
so ist $R - \beta .\ d = 24a^3b^4$

Endlich

Endlich suche man $C:d = \gamma = 6ab$,
und nehme $\gamma . d = 24a^3b^4$;
so ist $C - \gamma d = 0$.

Divisor d	Der ganze Dividendus D	Der Quotient
A B	C E F G	α β
$2ac - 3a^2b$	$6a^5bc - 16a^3c^2 - 9a^6b^2 + 24a^4bc^2$	$3a^4b - 8a^2c$

Die Rechnung selbst:

Man suche $C:A = \alpha = 3a^4b$
und nehme $\alpha . d = 6a^5bc - 9a^6b^2$;

$$\text{so ist } D - \alpha . d = \overset{E}{-16a^3c^2} + \overset{G}{24a^4bc^2} = R.$$

Hierauf suche man $E:A = \beta = -8a^2c$,
und nehme $d.\beta = -16a^3c^2 + 24a^4bc^2$;
so ist $R - d.\beta = 0$.

V. Capitel.

Von der Auflösung der Brüche in unendliche Reihen *).

§. 289.

Wenn sich der Dividendus durch den Divisor nicht theilen läßt, so wird der Quotient, wie schon oben gezeigt, durch einen Bruch ausgedrückt.

Also

*) Die Theorie der Reihen ist eine der wichtigsten in der ganzen Mathematik. Die Reihen, von denen hier in diesem Capitel die Rede ist, sind von Mercator gegen die Mitte des vorigen Jahrhunderts gefunden, und Newton erfand bald nachher diejenigen, welche von der Ausziehung der Wurzeln entspringen, wovon im zwölften Capitel gehandelt wird. Diese Theorie hat in der Folge einen neuen Grad der Vollkommenheit von vielen ausgezeichneten Geometern erhalten. Die Werke von Jakob Bernoulli und der zweyte Theil von Eulers Differen-

Also wenn 1 durch 1 — a getheilt werden soll, so bekommt man diesen Bruch $\frac{1}{1-a}$. Inzwischen kann doch die Division nach den vorhergehenden Regeln angestellt und, so weit man will, fortgesetzt werden, da dann immer der wahre Quotient, ob gleich in verschiedenen Formen, herauskommen muß.

§. 290.

Um dieses zu zeigen, so wollen wir den Dividendus 1 wirklich durch den Divisor 1 — a theilen, wie folget:

$$1-a)\ 1\ (1+\frac{a}{1-a} \qquad \text{oder} \qquad 1-a)\ 1\ (1+a+\frac{a^2}{1-a}$$

$$\begin{array}{l} +1-a \\ \hline \text{Rest} +a \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} +1-a \\ \hline +a \\ +a-a^2 \\ \hline \text{Rest} +a^2 \end{array}$$

Um noch mehr Formen zu finden, so theile man a^2 durch 1 — a, als:

$$1-a)\ a^2\ (a^2+\frac{a^3}{1-a}, \qquad \text{ferner}\ 1-a)\ a^3\ (a^3+\frac{a^4}{1-a}$$

$$\begin{array}{l} a^2-a^3 \\ \hline +a^3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} a^3-a^4 \\ \hline +a^4 \end{array}$$

ferner

rentialrechnung (aus dem Lateinischen ins Deutsche mit Anmerk. und Zusätzen von Michelsen übersetzt), sind diejenigen, woraus man sich am besten über diese Materie unterrichten kann. Man wird auch in den Mémoires de Berlin von 1768 eine neue Methode des Herrn de la Grange finden, vermittelst der unendlichen Reihen alle Buchstaben-Gleichungen von welchem Grade sie auch seyn mögen, aufzulösen. Diese Abhandlung ist vom Hrn. Prof. Michelsen übersetzt und findet sich in dem dritten Bande von Eulers Einleitung zur Analysis des Unendlichen, welcher auch unter dem besondern Titel: Theorie der Gleichungen, zu haben ist.

ferner $1-a)\ a^4 \quad (a^4+\frac{a^5}{1-a}$

$$\frac{a^4-a^5}{\quad +a^5}$$ u. s. f.

§. 291.

Hieraus sehen wir, daß der Bruch $\frac{1}{1-a}$ durch alle folgende Formen ausgedrückt werden kann:

I.) $1+\frac{a}{1-a}$, II.) $1+a+\frac{a^2}{1-a}$,

III.) $1+a+a^2+\frac{a^3}{1-a}$, IV.) $1+a+a^2+a^3+\frac{a^4}{1-a}$,

V.) $1+a+a^2+a^3+a^4+\frac{a^5}{1-a}$, u. s. f.

Man betrachte die erste Form $1+\frac{a}{1-a}$. Nun ist 1 so viel als $\frac{1-a}{1-a}$; folglich $1+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a}{1-a}+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a+a}{1-a}=\frac{1}{1-a}$.

Für die zweyte Form $1+a+\frac{a^2}{1-a}$ bringe man den ganzen Theil $1+a$ auch zum Nenner $1-a$, so bekommt man $\frac{1-a^2}{1-a}$, dazu $\frac{+a^2}{1-a}$, giebt $\frac{1-a^2+a^2}{1-a}$, das ist $\frac{1}{1-a}$.

Für die dritte Form $1+a+a^2+\frac{a^3}{1-a}$, giebt der ganze Theil zum Nenner $1-a$ gebracht $\frac{1-a^3}{1-a}$, dazu der Bruch $\frac{a^3}{1-a}$, macht $\frac{1}{1-a}$; woraus erhellet, daß alle diese Formen in der That so viel sind als der vorgegebene Bruch $\frac{1}{1-a}$.

§. 292.

Man kann daher solchergestalt so weit fortgehen, als man will, ohne daß man weiter nöthig hat zu rechnen. Also wird seyn $\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \frac{a^8}{1-a}$. Man kann auch so gar immer weiter fortgehen, ohne jemals aufzuhören, und dadurch wird der vorgelegte Bruch $\frac{1}{1-a}$ in eine unendliche Reihe aufgelöset, welche ist:

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12} \text{ u. s. f.}$$

bis ins Unendliche. Und von dieser unendlichen Reihe kann man mit Recht behaupten, daß ihr Werth gleich dem Bruch $\frac{1}{1-a}$ sey.

§. 293.

Dieses scheint anfänglich sehr wunderbar; jedoch wird es durch die Betrachtung einiger Fälle begreiflich werden. Es sey erstlich $a = 1$, so wird unsere Reihe $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ u. s. f. bis ins Unendliche, welche dem Bruch $\frac{1}{1-1}$, das ist $\frac{1}{0}$, gleich seyn soll. Wir haben aber schon oben (§. 83) bemerkt, daß $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl sey, und dieses wird hier von neuem auf das anschaulichste bestätigt.

Wenn man aber setzt $a = 2$, so wird unsere Reihe $= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$ u. s. f. bis ins Unendliche, deren Werth seyn soll $\frac{1}{1-2}$, das ist $\frac{1}{-1} = -1$; welches dem ersten Anblick nach ungereimt scheint.

Es ist aber zu merken, daß wenn man irgendwo in obiger Reihe stehen bleiben will, dazu allezeit noch ein Bruch gesetzt werden muß.

Also wenn wir z. B. bey 64 still stehen, so müssen wir zu $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$ noch diesen Bruch $\frac{128}{1-2}$, das ist $\frac{128}{-1} = -128$ hinzusetzen, woraus $127 - 128$ entsteht, das ist -1.

Geht man aber ohne Ende fort, so fällt der Bruch zwar weg, man steht aber hingegen auch niemals still.

§. 294.

So verhält sich also die Sache, wenn für a größere Zahlen als 1 angenommen werden. Nimmt man aber für a kleinere Zahlen, so läßt sich alles leichter begreifen.

Es sey z. B. $a = \frac{1}{2}$, so bekommt man $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, welches folgender Reihe gleich seyn wird: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$ u. s. f. ohne Ende. Denn nimmt man nur zwey Glieder, so hat man $1 + \frac{1}{2}$, und so fehlt noch $\frac{1}{2}$. Nimmt man drey Glieder, so hat man $1\frac{3}{4}$, fehlt noch $\frac{1}{4}$; nimmt man vier Glieder, so hat man $1\frac{7}{8}$, fehlt noch $\frac{1}{8}$; woraus man sieht, daß immer weniger fehlt, folglich wenn man unendlich weit fortgeht, so muß gar nichts fehlen.

Anmerk. Der Fehler wird nemlich hier immer noch einmal so klein, und kann daher zuletzt kleiner als jede gegebene Größe werden.

§. 295.

Man setze $a = \frac{1}{3}$, so wird unser Bruch $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, welchem daher folgende Reihe gleich ist:

 $1 + \frac{1}{3}$

$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ u. s. f. bis ins Unendliche. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $1\frac{1}{3}$, fehlt noch $\frac{1}{6}$. Nimmt man drey Glieder, so hat man $1\frac{4}{9}$, fehlt noch $\frac{1}{18}$. Nimmt man vier Glieder, so hat man $1\frac{13}{27}$, fehlt noch $\frac{1}{54}$. Da nun der Fehler immer dreymal kleiner wird, so muß derselbe endlich verschwinden.

§. 296.

Laßt uns annehmen $a = \frac{2}{3}$, so wird der Bruch $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$, die Reihe aber wird: $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243}$ u. s. f. bis ins Unendliche.

Nimmt man erstlich $1\frac{2}{3}$, so fehlt noch $1\frac{1}{3}$.
Nimmt man drey Glieder $2\frac{1}{9}$, so fehlt noch $\frac{8}{9}$.
Nimmt man vier Glieder $2\frac{11}{27}$, so fehlt noch $\frac{16}{27}$.

§. 297.

Es sey $a = \frac{1}{4}$, so wird der Bruch $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = 1\frac{1}{3}$ die Reihe aber wird $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ u. s. f. Nimmt man zwey Glieder $1\frac{1}{4}$, so fehlt noch $\frac{1}{12}$; nimmt man drey Glieder, so hat man $1\frac{5}{16}$, da denn noch $\frac{1}{48}$ fehlt, u. s. w.

§. 298.

Auf gleiche Weise kann auch dieser Bruch $\frac{1}{1+a}$ in eine unendliche Reihe aufgelöset werden, wenn man den Zähler 1 durch den Nenner $1 + a$ wirklich dividirt, wie folgt:

$$
\begin{array}{l}
1+a)\ 1\ (1-a+a^2-a^3+a^4 \\
\underline{1+a} \\
\quad -a \\
\quad \underline{-a-a^2} \\
\qquad +a^2 \\
\qquad \underline{+a^2+a^3} \\
\qquad\quad -a^3 \\
\qquad\quad \underline{-a^3-a^4} \\
\qquad\qquad +a^4 \\
\qquad\qquad \underline{+a^4+a^5} \\
\qquad\qquad\quad -a^5 \text{ u. s. f.}
\end{array}
$$

Daher ist unser Bruch $\frac{1}{1+a}$ gleich dieser unendlichen Reihe:

$$1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6-a^7 \text{ u. s. f.}$$

Zusatz. Da ich hier manches Paradoxon zu erläutern habe, so ist es nöthig, daß ich dieses Beyspiel ausführlich durchgehe. Die Aufgabe ist:

Den Quotienten anzugeben, welchen 1 durch 1+a dividirt geben muß.

Auflösung. 1) Das erste Glied des Quotienten ist $1:1=1$. Dieses mit dem Divisor $1+a$ multiplicirt, giebt $1+a$, und dieß vom Dividendus 1 abgezogen, giebt den Rest $1-1-a=-a$.

2) Vergleicht man den Divisor $1+a$ mit dem Rest $-a$, so ergiebt sich das zweyte Glied des Quotienten $=-a:1=-a$.

Multiplicirt man es mit dem Divisor $1+a$, so ist das Product $=-a-a^2$, und dieses vom Reste $-a$ abgezogen, giebt den neuen Rest $-a-(-a-a^2)=+a^2$.

3) Vergleicht man ferner den Divisor $1+a$ mit dem erst erhaltenen Rest $+a^2$, so findet man des Quotienten drittes Glied $a^2:1=a^2$.

Multiplicirt man dieses mit dem Divisor $1+a$, so erhält man das Product $=a^2+a^3$, und dieses vom Rest a^3 abgezogen, giebt $a^2-(a^2+a^3)=-a^3$.

4) Vergleicht man den Divisor $1+a$ mit dem Rest $-a^3$, so findet man das vierte Glied des Quotienten $=-a^3:1=-a^3$.

Multiplicirt man damit den Divisor $1 + a$, so ist das Product $= - a^3 - a^4$, und wenn man nun dieses vom Reste $- a^3$ abzieht, so findet man den neuen Rest $- a^3 - (- a^3 - a^4) = + a^4$.

5) Die bisher in (n. 1, 2, 3, 4.) erhaltenen Glieder des Quotienten, und die zugehörigen Reste sind also:

Die Glieder des Quotienten: $1 - a + a^2 - a^3$

Die zugehörigen Reste: $- a + a^2 - a^3 + a^4$

6) Die Glieder des Quotienten in (n. 5.) richten sich nach diesem Gesetze: vom zweyten Gliede an folgen die Potenzen von a so auf einander, daß der Exponent von a in jedem Gliede um Eins kleiner ist, als die Zahl, welche anzeiget, das wievielste selbiges Glied ist, ob es nemlich das zweyte, dritte, vierte u. s. f. ist, so, daß jede gerade Potenz von a, die nemlich 2, 4, 6, 8 u. s. f. zum Exponenten hat, bejaht, und jede andere verneint ist.

7) Die Reste aber, welche bey der Bestimmung der Glieder erhalten werden (n. 5.), sind ebenfalls Potenzen von a, aber um einen Grad höher, als die, welche die Glieder des Quotienten enthalten, bey deren Bestimmung sie erhalten werden, und zwar bejaht sind alle gerade Potenzen von a, verneint aber die übrigen.

8) Man nehme nun an, daß die Gesetze (n. 6. 7.) für eine gewisse Anzahl n von Gliedern des verlangten Quotienten richtig sind, so muß das nte Glied desselben $\pm a^{n-1}$ seyn, und einen Rest $= \mp a^n$ zurücklassen, und nun giebt dieser Rest durch das erste Glied 1 des Divisors $1 + a$ dividirt, das nächst folgende $(n + 1)$te Glied $\mp a^n$ des Quotienten.

Offenbar ist es also, daß, wenn die Gesetze (n. 6. 7.) für n Glieder des verlangten Quotienten gelten, sie auch für die um Eins größere Anzahl derselben gelten müssen: da also diese Gesetze für 4 Glieder wirklich gelten, wegen (n. 5.); so müssen sie auch für $4 + 1$ oder 5 Glieder gelten, und wenn dieses wahr ist, gelten die Gesetze auch für $5 + 1 = 6$ Glieder, u. s. f. für jede nächst größere Anzahl von Gliedern.

9) Man kann daher den verlangten Quotienten auf die nachstehende Art angeben: $\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - - - - \pm a^{n} \mp a^{n+1} \pm - - -$

Eben so findet man:

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + - - - + a^n + - - -$$

(siehe §. 292).

Um

Um nun aber die Schwierigkeiten zu heben, die viele Mathematikverständige bey diesen unendlichen Reihen gefunden haben, und wobey selbst ein Euler nicht allein unzulängliche, sondern sogar zum Theil ganz falsche Gründe angiebt, wie z. B. in §. 299, müssen wir allemal auf den Rest achten, der übrig bleibt, man mag aufhören bey welchem Gliede mag will.

Aus dem vorhergehenden erhellet nemlich, daß das $(2n+1)$te Glied des Quotienten $\frac{1}{1+a} = + a^{2n}$, und der dazu gehörige Rest $-a^{2n+1}$ ist.

Der Quotient vollständig ausgedrückt, wäre daher folgender:

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \text{- - - -} + a^{2n} - \frac{a^{2+1}}{1+a}\text{; oder auch}$$

$$= 1 - a + a^2 - a^3 + \text{- - - -} - a^{2n+1} + \frac{a^{2n+2}}{1+a}$$

Wäre $a = 1$, so ist $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1$ - - - $+ 1 - \frac{1}{2}$ oder $= 1 - 1 + 1$ - - - - $+ 1 - 1 + \frac{1}{2}$. Jedes ungerade Glied hebt sich mit seinem nächst folgenden Gliede auf. Im ersten Falle bleibt also übrig $+ 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, und im zweyten Falle bleibt bloß die Ergänzung $\frac{1}{2}$ übrig. Nimmt man also, wie billig, auf diese Ergänzung Rücksicht, so schwinden alle Schwierigkeiten, wovon weiter unten ein mehreres.

§. 299.

Setzt man $a = 1$, so erhält man diese merkwürdige Vergleichung:

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \text{ u. s. f.}$$

bis ins Unendliche, welches widersinnig scheint; denn wenn man irgendwo mit $- 1$ aufhört, so giebt diese Reihe 0; hört man irgend aber mit $+$ auf, so giebt dieselbe 1. Allein eben hieraus läßt sich die Sache begreifen; denn wenn man ohne Ende fort gehen und weder bey $- 1$ noch $+ 1$ irgendwo aufhören muß, so kann weder 1 noch 0 herauskommen, sondern etwas, das dazwischen liegt, welches $\frac{1}{2}$ ist.

§. 300.

Es sey ferner $a = \frac{1}{2}$, so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, welchem folglich gleich seyn wird die Reihe: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ u. s. f. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $\frac{1}{2}$, welches um $\frac{1}{6}$ zu wenig ist. Nimmt man drey Glieder, so hat man $\frac{3}{4}$, also um $\frac{1}{12}$ zu viel. Nimmt man vier Glieder, so hat man $\frac{5}{8}$, welches um $\frac{1}{24}$ zu wenig ist u. s. f.

§. 301.

Setzt man $a = \frac{1}{3}$, so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$, dem diese Reihe gleich seyn wird: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$ u. s. f. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $\frac{2}{3}$, ist zu wenig um $\frac{1}{12}$. Nimmt man drey Glieder, so hat man $\frac{7}{9}$, ist zu viel um $\frac{1}{36}$. Nimmt man vier Glieder, so hat man $\frac{20}{27}$, ist zu wenig um $\frac{1}{108}$, u. s. f.

§. 302.

Man kann den Bruch $\frac{1}{1+a}$ noch auf eine andere Art auflösen, indem man 1 durch $a + 1$ theilt, nemlich:

$$a+1)\ 1\ (\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}\ \text{u. s. f.}$$

$$1+\frac{1}{a}$$

1ster Rest $-\frac{1}{a}$

$$-\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}$$

2ter Rest $+\frac{1}{a^2}$

$$+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}$$

3ter Rest $-\frac{1}{a^3}$

$$-\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}$$

4ter Rest $+\frac{1}{a^4}$

$$+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}$$

5ter Rest $-\frac{1}{a^5}$ u. s. f.

Folglich ist unser Bruch $\frac{1}{a+1}$ dieser Reihe gleich: $\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}$ u. s. f. ohne Ende. Setzt man $a = 1$, so bekommt man diese Reihe: $1-1+1-1+1-1+1$ u. s. f. $=\frac{1}{2}$ wie oben. Setzt man $a = 2$, so bekommt man diese Reihe: $\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}$ u. s. f.

Zusatz. Auch hier sieht man leicht ein, daß der $(n-1)$te Rest das $n$te Glied des Quotienten giebt. Ist nun n ungerade, so ist das $n$te Glied des Quotienten, so wie auch der $(n-1)$te Rest positiv.

§. 303.

§. 303.

Auf gleiche Weise kann man auf eine allgemeine Art diesen Bruch $\frac{c}{a+b}$ in eine Reihe auflösen:

$$a+b)\ c\ (\frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} \text{ u. s. f.}$$

$$c + \frac{bc}{a}$$

1ster Rest $-\frac{bc}{a}$

$$-\frac{bc}{a} - \frac{b^2c}{a^2}$$

2ter Rest $+\frac{b^2c}{a^2}$

$$+\frac{b^2c}{a^2} + \frac{b^3c}{a^3}$$

3ter Rest $-\frac{b^3c}{a^3}$

Woraus wir diese Vergleichung erhalten:

$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4}$ bis ins Unendliche.

Es sey $a = 2$, $b = 4$, und $c = 3$, so haben wir

$\frac{c}{a+b} = \frac{3}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 3 + 6 - 12$ u. s. f.

Es sey $a = 10$, $b = 1$ und $c = 11$, so haben wir

$\frac{c}{a+b} = \frac{11}{10+1} = 1 = \frac{11}{10} - \frac{11}{100} - \frac{11}{1000}$ u. s. f.

Nimmt man nur ein Glied, so hat man $\frac{11}{10}$, welches um $\frac{1}{10}$ zu viel. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $\frac{99}{100}$, welches um $\frac{1}{100}$ zu wenig. Nimmt man drey Glieder, so hat man $\frac{1001}{1000}$, ist zu viel um $\frac{1}{1000}$ u. s. f.

1. Zusatz.

1. Zusatz. Der 2n − 1te Rest ist also $-\frac{b^{2n-1}c}{a^{2n-1}}$, und dieser giebt das 2nte Glied des Quotienten $= -\frac{b^{2n-1}c}{a^{2n}}$.

2. Zusatz. Daß $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} + \frac{b^4c}{a^5} - - - \frac{b^{2n-1}c}{a^{2n}} + \frac{b^{2n}c}{a^{2n+1}} - - -$ ist, davon kann man sich auch, ohne die Division wirklich zu verrichten, auf folgende Art überzeugen:

Es ist $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a\left(1+\frac{b}{a}\right)} = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{b}{a}}$

Nun ist aus §. 298. bekannt, daß

$$\frac{1}{1+\frac{b}{a}} = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - - - - \frac{b^{2n-1}}{a^{2n-1}} + \frac{b^{2n}}{a^{2n}} - - - -$$

Folglich ist auch $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{b}{a}} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a} - \frac{b^3c}{a^4} + \frac{b^4c}{a^5} - - - - \frac{b^{2n-1}.c}{a^{2n}} + \frac{b^{2n}.c}{a^{2n+1}} - - - -$

Eben so findet man:

$$\frac{c}{a-b} = \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{1-\frac{b}{a}} = \frac{c}{a}\left(1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} + \cdots + \frac{b^r}{a^r} + \cdots\right) \text{ (§. 292.)}$$

$$= \frac{c}{a} + \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^3c}{a^4} + \cdots + \frac{b^rc}{a^{r+1}} + \cdots$$

Es ist einleuchtend, daß beyde Reihen sich nähern müssen, wenn a > b genommen wird, und daß sie sich desto schneller ihrem wahren Werthe nähern werden, je größer a in Vergleichung mit b seyn wird.

Das bisher Gesagte setzt uns schon in den Stand, einen jeden gegebenen Bruch $\frac{p}{q}$ in eine solche Reihe zu verwandeln,

daß

daß die ersten Glieder derselben schon sehr genau eben den Bruch geben, welcher die Summe der ganzen Reihe seyn muß.

Zu dieser Absicht kann man eine große ganze Zahl n nehmen und $\frac{p}{q} = \frac{pn}{nq} = \frac{p.n}{nq+1-1} = n. \frac{p}{nq+1-1}$ setzen.

Wenn man also $n.q + 1 = a$; $1 = b$ und $p = c$ bey der Formel $\frac{c}{a-b}$ setzt; so findet man die verlangte Reihe:

$$\frac{p}{q} = n.\left(\frac{p}{nq+1} + \frac{p}{(nq+1)^2} + \frac{p}{(nq+1)^3} + \right)$$

Es sey $\frac{p}{q} = \frac{3}{2}$, so ist $p = 3$, $q = 2$, und man nehme $n = 10000$; so ist $\frac{3}{2} = 10000\left(\frac{3}{20001} + \frac{3}{(20001)^2} + \frac{3}{(20001)^3} + - - -\right)$

Und nun ist klar, daß, obgleich die Anzahl der Glieder dieser Reihe völlig unbestimmt, ja unendlich groß ist, dennoch schon die ersten Glieder mit 10000 multiplicirt, den Bruch $\frac{3}{2}$ sehr genau geben müssen, und noch genauer geben würden, wenn man für n eine noch größere Zahl nähme.

Der Mathematiker ist noch nicht damit zufrieden, daß er weiß, daß die ersten Glieder einer Reihe schon für die Praxis hinreichen, sondern er will auch noch den Fehler bestimmen, welchen man begehen würde, wenn man die Summe von einigen ersten Gliedern der einem Bruche zugehörigen Reihe statt der Summe der ganzen Reihe in einer Rechnung gebrauchte, ohne diese Summe erst zu suchen, ja ohne den Bruch in die zugehörige Reihe zu verwandeln.

Dazu soll nun folgende Betrachtung dienen:

Wenn in der den Bruch $\frac{c}{a+b}$ zugehörigen Reihe irgend ein Glied, z. B. das (r+1)te diese Form $\pm \frac{b^r c}{a^{r+1}}$ hätte, so ist

$\mp \frac{b^{r+1} c}{a^{r+1}}$ der (r+1) te Rest, der das nun folgende (r+2) te

Glied der Reihe geben würde, wenn man weiter dividiren wollte.

Wollte man daher mit den ersten r+1 Gliedern der Reihe zufrieden seyn, so vernachläßigt man einen Bruch, der entstehet, wenn man den (r+1) ten Rest noch mit dem Divisor theilt, dieser Bruch wäre also folgender:

Es

$$\mp \frac{b^{r+1}c}{a^{r+1}(a+b)} = \mp \frac{b^{r+1}c}{a^{r+2}+a^{r+1}.b}$$

Es sey z. B. $c=3$, $a=100$, $b=2$, und $r=4$, also $r+1=5$, und $r+2=6$, so ist $\frac{c}{a+b} = \frac{3}{102} = \frac{3}{100+2}$ und

$$\frac{b^{r+1}c}{a^{r+2}+a^{r+1}.b} = \frac{2^5.3}{100^6+100^5.2} =$$

$$\frac{32.3}{1.000.000.000.000+20000000000}$$

$$= \frac{96}{1020000000000} = \frac{1}{106250000}$$

Weil aber $r = 4$ eine gerade, daher $r+1 = 5$ eine ungerade Zahl war; so ist dieser Bruch negativ, das heißt nun: wenn man den Bruch $\frac{3}{102} = \frac{3}{100+2}$ in eine Reihe verwandelt, und davon nur die 5 ersten Glieder zusammen addirte; so würde diese Summe mit dem Bruch $\frac{1}{106250000}$ zusammen genommen, die Summe der ganzen Reihe, daher den Bruch $\frac{3}{102}$ genau geben, folglich wäre jene Summe nur um $\frac{1}{106250000}$ größer als der Bruch $\frac{3}{102}$.

§. 304.

Wenn der Divisor aus mehrern Theilen besteht, so kann die Division auf eben diese Art ins Unendliche fortgesetzt werden.

Z. B. wenn dieser Bruch $\frac{1}{1-a+a^2}$ gegeben wäre, so wird die unendliche Reihe, die demselben gleich ist, auf folgende Art gefunden:

$1 - a + a^2) \; 1 \; (1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7$ u. s. f.

$1 - a + a^2$

1ster Rest $+a - a^2$

$+a - a^2 + a^3$

2ter Rest $-a^3$

$-a^3 + a^4 - a^5$

3ter Rest $-a^4 + a^5$

$-a^4 + a^5 - a^6$

4ter Rest $+a^6$

$+a^6 - a^7 + a^8$

5ter Rest. $+a^7 - a^8$

$+a^7 - a^8 + a^9$

6ter Rest. $-a^9$ u. s. f.

Daher haben wir folgende Gleichung: $\frac{1}{1-a+a^2} = 1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 - a^9 - a^{10}$ u. s. f. ohne Ende. Nimmt man hier $a = 1$, so bekommt man: $1 = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1$ u. s. f. welche Reihe die schon oben (§. 299.) gefundene $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ u. s. f. verdoppelt in sich enthält; da nun die obige Reihe gleich $\frac{1}{2}$ war, so ist kein Wunder, daß diese $\frac{2}{2}$, das ist 1, ausmacht.

Setzt man $a = \frac{1}{2}$, so bekommt man diese Gleichung: $\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{512}$ u. s. f. Setzt man $a = \frac{1}{3}$, so bekommt man folgende Gleichung, als $\frac{1}{\frac{7}{9}}$ oder $\frac{9}{7} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{729}$ u. s. f. Nimmt man hier vier Glieder, so bekommt man $\frac{104}{81}$, welches um $\frac{1}{567}$ kleiner als $\frac{9}{7}$ ist.

Man setze ferner $a = \frac{2}{3}$, so bekommt man diese Gleichung: $\frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \frac{64}{729}$ u. s. f. und diese Reihe muß der vorigen gleich seyn; man subtrahire also die obere von dieser, so bekommt man: $0 = \frac{1}{3}$

$0 = \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{15}{81} + \frac{63}{729}$ u. s. f. welche vier Glieder zusammen $-\frac{2}{81}$ machen.

Zusatz. Anfängern ist es ziemlich schwer, das allgemeine Gesetz der Reihe zu entdecken, welche $\frac{1}{1-a+a^2}$ giebt. Ich will daher solches hier mittheilen. Es ist nemlich:

$$\frac{1}{1-a+a^2} = \overset{1}{a^0} + \overset{2}{a^1} - \overset{3}{a^3} - \overset{4}{a^4} + \overset{5}{a^6} + \overset{6}{a^7} - \overset{7}{a^9} - \overset{8}{a^{10}}$$

$$\text{- - - - -} \quad + \overset{(2x+1)\text{tes}}{a^{3x}} + \overset{2(x+1)\text{tes Glied}}{a^{1+3x}} + \quad \text{- - - -}$$

Gesetzt, man wollte das 13te Glied wissen, so muß, da 13 ungerade ist, das x aus dieser Formel $2x+1$, welche jede ungerade Zahl vorstellt, bestimmt werden. Wir haben daher folgende Gleichung:

$$2x + 1 = 13$$
$$1 = 1 \text{ subtrahirt}$$

bleibt $2x = 12$; denn wenn Gleiches von Gleichem subtrahirt wird, so bleibt Gleiches.

Wenn aber eine Zahl x, zweymal genommen, gleich 12 ist, so muß diese Zahl $x = 6$ seyn. Nun ist das zu $2x+1$ zugehörige Glied der Reihe $= a^{3x}$; da nun $x = 6$, so ist das 13te Glied $= a^{3.6} = a^{18}$.

Man soll das 30te Glied bestimmen.

Da 30 eine gerade Zahl ist, so muß man $2(x+1) = 30$ setzen, mit 2 auf beyden Seiten dividirt, giebt $x + 1 = 15$, denn wenn man Gleiches mit Gleichem dividirt, $1 = 1$ subtrahirt, so kommen gleiche Quotienten, folglich $x = 14$.

Da nun a^{1+3x} zu $2(x+1)$ gehört, so findet sich $a^{1+3x} = a^{1+3.14} = a^{43}$ als das 30te Glied der Reihe. Um nun zu bestimmen, welches Zeichen diese Glieder, nemlich das 13te und 30te Glied, haben, so darf man nur überlegen, daß das erste Paar positiv, das 2te Paar negativ, das 3te Paar wieder positiv u. s. w. also immer abwechselnd, woraus man deutlich einsieht, daß jedes ungerade Paar Glieder positiv, und jedes gerade negativ ist.

Bis zum 13ten Gliede sind 6 Paar Glieder, und ein Glied von dem siebenten Paare vorhanden; also ist das 13te Glied positiv, weil es das erste Glied eines ungeraden Paares ist.

Ferner, bis zum 30ten Gliede sind 15 Paare, also ist das 30te Glied auch positiv.

Allgemein, $\frac{2x+1}{2} = x + \frac{1}{2}$, das heißt: bis zum $(2x+1)$ten Gliede sind x Paar, und von dem $(x+1)$ten Paar ist nur das erste Glied vorhanden, aber zu $(x+1)$ Paaren gehören $2(x+1)$ Glieder; wenn daher $x+1$ gerade ist, so ist das zu $2x+1$ oder zu $2(x+1)$ gehörige Glied negativ, positiv aber, wenn $x+1$ ungerade ist.

§. 305.

Auf diese Art kann man alle Brüche in unendliche Reihen auflösen, und dies hat nicht nur öfters sehr großen Nutzen, sondern es ist auch an sich selbst höchst merkwürdig, daß eine unendliche Reihe, ungeachtet dieselbe niemals aufhört, dennoch einen bestimmten Werth haben könne. Es sind auch die wichtigsten Entdeckungen aus diesem Grunde hergeleitet worden, daher verdient diese Materie allerdings mit der größten Aufmerksamkeit erwogen zu werden. (Siehe §. 303. den 2ten Zusatz am Ende).

VI. Capitel.

Von den Quadraten der zusammengesetzten Größen.

§. 306.

Wenn man das Quadrat einer zusammengesetzten Größe finden soll, so darf man dieselbe nur mit sich selbst multipliciren, und das Product wird das Quadrat davon seyn.

Also wird das Quadrat von $a + b$ gefunden, wie folget:

$a + b$

$$\begin{array}{l} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$$

§. 307.

Wenn daher die Wurzel aus zwey Theilen besteht, die zusammen addirt sind, als $a + b$, so besteht das Quadrat I.) aus den Quadraten eines jeden Theils, nemlich a^2 und b^2, II.) aus dem doppelten Product der beyden Theile, nemlich $2ab$, und die ganze Summe $a^2 + 2ab + b^2$ ist das Quadrat von $a + b$.

Es sey z. B. $a = 10$ und $b = 3$, also daß das Quadrat von 13 gefunden werden soll; so wird solches seyn $= 100 + 60 + 9 = 169$.

§. 308.

Durch Hülfe dieser Formel lassen sich nun leicht die Quadrate von ziemlich großen Zahlen finden, wenn dieselben in zwey Theile zergliedert werden.

Also um das Quadrat von 57 zu finden, so zertheile man diese Zahl in $50 + 7$; daher das Quadrat seyn wird:

$$2500 + 700 + 49 = 3249.$$

§. 309.

Hieraus sieht man, daß das Quadrat von $a + 1$ seyn werde $a^2 + 2a + 1$; da nun von a das Quadrat a^2 ist, so wird das Quadrat von $a + 1$ gefunden, wenn man zu jenem addirt $2a + 1$, wobey zu merken, daß $2a + 1$ die Summe der beyden Wurzeln a und $a + 1$ ist; da also von 10 das Quadrat 100 ist, so wird das Quadrat von 11 seyn $= 100 + 21$, und

da von 57 das Quadrat 3249 ist, so wird das Quadrat von 58 seyn $= 3249 + 115 = 3364$. Und ferner das Quadrat von $59 = 3364 + 117 = 3481$. Noch ferner das Quadrat von $60 = 3481 + 119 = 3600$ u. s. f.

§. 310.

Das Quadrat einer zusammengesetzten Größe, als $a + b$, wird also angedeutet $(a + b)^2$; daher haben wir $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, woraus folgende Gleichungen hergeleitet worden: $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$, $(a + 2)^2 = a^2 + 4a + 4$, $(a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9$, $(a + 4)^2 = a^2 + 8a + 16$, u. s. f.

§. 311.

Wenn die Wurzel $a - b$ ist, so wird ihr Quadrat $= a^2 - 2ab + b^2$ seyn, welches daher aus den Quadraten beyder Theile besteht, wovon aber das doppelte Product weggenommen werden muß.

Es sey z. B. $a = 10$ und $b = 1$, so wird das Quadrat von $9 = 100 - 20 + 1 = 81$ seyn.

§. 312.

Da wir nun diese Gleichung haben: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, so wird $(a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1$ seyn; das Quadrat von $a - 1$ wird also gefunden, wenn man von a^2 subtrahirt $2a - 1$, welches die Summe der beyden Wurzeln a und $a - 1$ ist.

Es sey z. B. $a = 50$, so ist $a^2 = 2500$ und $a - 1 = 49$, daher $49^2 = 2500 - 99 = 2401$.

§. 313.

Dieses läßt sich auch durch Brüche erläutern. Denn wenn man für die Wurzel $\frac{3}{5} + \frac{2}{5}$, welches 1 ausmacht, nimmt, so wird das Quadrat seyn: $\frac{9}{25} + \frac{4}{25} + \frac{12}{25} = \frac{25}{25}$, das ist 1.

Ferner

Ferner das Quadrat von $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, welches $\frac{1}{6}$ ist, wird seyn $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{36}$.

§. 314.

Wenn die Wurzel aus mehr Gliedern besteht, so läßt sich das Quadrat auf gleiche Art bestimmen. Also von $a + b + c$ wird das Quadrat gefunden, wie folget:

$$\begin{array}{l}
a + b + c \\
a + b + c \\
\hline
a^2 + ab + ac \qquad + bc \\
\quad + ab + ac + b^2 + bc + c^2 \\
\hline
a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2
\end{array}$$

woraus man sieht, daß dasselbe I. aus dem Quadrat eines jeden Theils der Wurzel und II. aus dem doppelten Product von je zwey Theilen mit einander besteht.

§. 315.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, wollen wir die Zahl 256 in diese drey Theile zertheilen $200 + 50 + 6$; daher das Quadrat davon aus folgenden Theilen zusammengesetzt seyn wird:

$$\begin{array}{r}
40000 \\
2500 \\
36 \\
20000 \\
2400 \\
600 \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad\qquad
\begin{array}{r}
256 \\
256 \\
\hline
1536 \\
1280 \\
512 \\
\hline
65536
\end{array}$$

65536 und dieses ist dem 256.256 vollkommen gleich.

§. 316.

Wenn einige Glieder in der Wurzel negativ sind, so wird das Quadrat nach eben dieser Regel gefunden, wenn man nur bey den doppelten Producten

Achtung giebt, was für ein Zeichen einem jeden zukommt.

Also von a — b — c wird das Quadrat seyn:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc.$$

Wenn also die Zahl 256 also vorgestellet wird: 300 — 40 — 4, so bekömmt man:

positive Theile	negative Theile
+ 90000	— 24000
1600	2400
320	— 26400
16	
+ 91936	
— 26400	

65536. Quadrat von 256, wie oben.

Zusatz. Wenn die Wurzel vieltheilig ist, so enthält das Quadrat derselben die Quadrate aller Theile, und die doppelten Producte aus der Summe aller ersten Theile in den nächstfolgenden.

Beweis:

Man setze, die vieltheilige Wurzel sey a + b + c + d + e - - - — + x, so soll

$$(a + b + c + d + e - - - x)^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$
$$+ 2(a+b)c + c^2$$
$$+ 2(a+b+c)d + d^2$$
$$+ 2(a+b+c+d)e + e^2$$
$$+ 2(a+b+c+d+e)f + f^2$$
$$\vdots$$
$$+ 2(a+b+c - - + v + w)x + x^2$$ seyn.

Folgende Schlüsse werden uns von der Richtigkeit dieser Producte überzeugen:

Es sey $a + b + c + d + e - - x = A + x$,

so ist $(a + b + c + d - + x)^2 = A^2 + 2Ax + x^2$

A ist gleich $(a + b + c - - - - -)$ nemlich allen Theilen weniger x,

folglich $2Ax + x^2 = 2(a + b + c - + v + w)x + x^2$.

Nun setze man $A = (a + b + c - + v + w) = B + w$, so daß also B wiederum einen Theil weniger hat, als A, so ist

$A^2 = B^2$

$$A^2 = B^2 + 2Bw + w^2$$

also ist $2Bw + w^2 = 2(a + b + c - - - + v) w + w^2$.

Aus dem bisherigen ist schon klar, daß der in Klammern eingeschlossene Factor von unten an gerechnet immer im folgenden einen Theil weniger haben wird, als der nächst vorhergehende, daß also zuletzt nur zwey Theile übrig bleiben können, nemlich $a + b$, deren Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$ ist.

VII. Capitel.

Von der Ausziehung der Quadratwurzel in zusammengesetzten Größen.

§. 317.

Um eine sichere Regel zur Ausziehung zusammengesetzter Wurzeln zu finden, müssen wir das Quadrat von der Wurzel $a + b$, welches $a^2 + 2ab + b^2$ ist, genau in Erwägung ziehen, und suchen, wie man wieder aus dem gegebenen Quadrat die Wurzel herausbringen könne. Hierüber sind folgende Betrachtungen anzustellen.

§. 318.

Erstlich, da das Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$ aus mehrern Gliedern besteht, so ist gewiß, daß auch die Wurzel aus mehr als einem Gliede bestehen müsse; und wenn das Quadrat so geschrieben wird, daß die Potenzen von einem Buchstaben, als a, immer abnehmen, so ist klar, daß das erste Glied das Quadrat von dem ersten Glied der Wurzel seyn werde. Da nun in unserm Fall das erste Glied des Quadrats a^2 ist, so ist offenbar, daß das erste Glied der Wurzel, a seyn müsse.

§. 319.

Hat man nun das erste Glied der Wurzel, nemlich a gefunden, so betrachte man das übrige im Quadrat, welches $2ab + b^2$ ist, um zu sehen, wie man daraus den andern Theil der Wurzel, welcher b ist, finden könne. Hiebey bemerken wir, daß jenes übrige oder jener Rest $2ab + b^2$ durch folgendes Product vorgestellet werden könne $(2a + b)b$. Da nun dieser Rest zwey Factoren, $2a + b$ und b hat, so wird der letztere b, das ist der zweyte Theil der Wurzel, gefunden, wenn man den Rest $2ab + b^2$ durch $2a + b$ dividirt.

§. 320.

Um also den zweyten Theil der Wurzel zu finden, so muß man den Rest durch $2a + b$ dividiren, da dann der Quotient der zweyte Theil der Wurzel seyn wird. Bey dieser Division aber ist zu merken, daß 2a das Doppelte von dem schon gefundenen ersten Theil der Wurzel a ist; das andere Glied b aber ist zwar noch unbekannt, und muß seine Stelle noch offen bleiben; doch kann man gleichwohl die Division vornehmen, indem dabey nur auf das erste Glied 2a gesehen wird. So bald man aber den Quotienten gefunden, welcher hier b ist, so muß man denselben auch an die offene Stelle setzen und die Division vollenden.

§. 321.

Die Rechnung also, wodurch aus obigem Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$ die Wurzel gefunden wird, kann also vorgestellt werden:

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2 + 2ab + b^2 \;(a + b \\
 & a^2 \\
\hline
2a + b & + 2ab + b^2 \\
 & + 2ab + b^2 \\
\hline
 & \quad 0
\end{array}
$$

§. 322.

§. 322.

Auf solche Art kann auch die Quadratwurzel aus andern zusammengesetzten Formeln, wenn dieselben nur Quadrate sind, gefunden werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$
\begin{array}{r|l}
 & a^2+6ab+9b^2\;(a+3b \\
 & a^2 \\
\hline
2a+3b & +6ab+9b^2 \\
 & +6ab+9b^2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 4a^2-4ab+b^2\;(2a-b \\
 & 4a^2 \\
\hline
4a-b & -4ab+b^2 \\
 & -4ab+b^2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 9p^2+24pq+16q^2)\;3p+4q \\
 & 9p^2 \\
\hline
6p+4q & +24pq+16q^2 \\
 & +24pq+16q^2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 25x^2-60x+36)\;5x-6 \\
 & 25x^2 \\
\hline
10x-6 & -60x+36 \\
 & -60x+36 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

§. 323.

Wenn bey der Division noch ein Rest bleibt, so ist es ein Zeichen, daß die Wurzel aus mehr als 2 Gliedern besteht. Alsdann werden die zwey schon gefundenen Glieder zusammen als der erste Theil betrachtet, und aus dem Rest auf gleiche Weise wie vorher das folgende Glied der Wurzel gefunden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$a^2 + 2ab - 2ac - 2bc + b^2 + c^2 \;(a + b - c$$
$$\begin{array}{r|l} & a^2 \\ \hline 2a + b & + 2ab - 2ac - 2bc + b^2 + c^2 \\ & + 2ab \qquad\qquad\qquad\; + b^2 \\ \hline 2a + 2b - c & - 2ac - 2bc + c^2 \\ & - 2ac - 2bc + c^2 \\ \hline \end{array}$$

$$a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 \;(a^2 + a + 1$$
$$\begin{array}{r|l} & a^4 \\ \hline 2a^2 + a & + 2a^3 + 3a^2 \\ & + 2a^3 + a^2 \\ \hline 2a^2 + 2a + 1 & + 2a^2 + 2a + 1 \\ & + 2a^2 + 2a + 1 \\ \hline \end{array}$$

$$a^4 - 4a^3b + 8ab^3 + 4b^4 \;(a^2 - 2ab - 2b^2$$
$$\begin{array}{r|l} & a^4 \\ \hline 2a^2 - 2ab & - 4a^3b + 8ab^3 \\ & - 4a^3b + 4a^2b^2 \\ \hline 2a^2 - 4ab - 2b^2 & - 4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 \\ & - 4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 \\ \hline \end{array}$$

$$
\begin{array}{l|l}
 & a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6 \,(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
 & a^6 \\
\hline
2a^3 - 3a^2b & -6a^5b + 15a^4b^2 \\
 & -6a^5b + 9a^4b^2 \\
\hline
2a^3 - 6a^2b + 3ab^2 & + 6a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \\
 & + 6a^4b^2 - 18a^3b^3 + 9a^2b^4 \\
\hline
2a^3 - 6a^2b + 6ab^2 - b^3 & - 2a^3b^3 + 6a^2b^4 - 6ab^5 + b^6 \\
 & - 2a^3b^3 + 6a^2b^4 - 6ab^5 + b^6 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

§. 323.

Aus dieser Regel folgt nun leicht diejenige, welche in den Rechenbüchern für die Ausziehung der Quadratwurzel gegeben wird:

$$\sqrt{5|29} = 23.$$

```
√ 5|29 = 23.      √ 17|64 = 42.      √ 23|04 = 48.
  4|                16|                16|
 ------            ------             ------
43|129           82|164             88|704
  |129             |164               |704
  -----            -----              -----
    0                0                  0

      √ 40|96 = 64.          √ 96|04 = 98.
        36|                    81|
       -------               -------
     124|496               188|1504
        |496                  |1504
        -----                 ------
          0                      0

     √ 1|56|25 = 125.       √ 99|80|01 = 999.
       1|  |                  81|  |
      --------               ---------
     22|56                 189|1880
       |44                    |1701
      --------               ---------
    245|1225              1989|17901
       |1225                  |17901
       ------                 -------
          0                      0
```

§. 325.

Wenn aber bey der Operation zuletzt etwas übrig bleibt, so ist solches ein Zeichen, daß die gegebene Zahl kein Quadrat ist und also die Wurzel davon nicht angegeben werden kann. In solchen Fällen bedient man sich des oben gebrauchten Wurzelzeichens, welches vor die Formel geschrieben, die Formel selbst aber in Klammern eingeschlossen wird. Also wird die Quadratwurzel von $a^2 + b^2$ auf diese Weise angedeutet: $\surd (a^2 + b^2)$; und $\surd (1 - xx)$ deutet die Quadratwurzel aus $1 - xx$ an. Statt dieses Wurzelzeichens kann man sich auch des gebrochenen Exponenten $\frac{1}{2}$ bedienen. Also wird auch durch $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ die Quadratwurzel aus $a^2 + b^2$ angedeutet.

Zusatz. Aus der Arithmetik ist bekannt, daß die Einer zur Ordnung null, die Zehner zur ersten, die Hunderte zur zweyten, die Tausende zur dritten Ordnung gehören u. s. w.

Um anzudeuten, von welcher Ordnung eine Ziffer ist, schreibt man gerade über die Ziffer eine kleine Ziffer, welche die Ordnung anzeigen soll, und der **Ordnungsexponent** genannt wird. Z. B. $\overset{6}{7}$ deutet an, daß 7 zur 6ten Ordnung gehört, oder 7000000.

Eine kleine Aufmerksamkeit wird sogleich lehren, daß der Ordnungsexponent auch anzeigt, wie viel Nullen man der ihm zugehörigen Ziffer anhängen soll. Eben so wird man leicht einsehen, daß $\overset{3}{7}\cdot\overset{9}{8} = \overset{3+9}{56} = 5\overset{12}{6}$: nemlich von dieser Zahl 56 gehört die 6, so wie die ganze Zahl, zur 12ten, und die 5 zur 13ten Ordnung.

Ferner $\left(\overset{7}{4}\right)^2 = \overset{7}{4}\cdot\overset{7}{4} = \overset{14}{4^2}$ und $\left(\overset{2}{3}\right)^5 = \overset{2}{3}\cdot\overset{2}{3}\cdot\overset{2}{3}\cdot\overset{2}{3}\cdot\overset{2}{3} = \overset{10}{3^5}$. Dieses wenige vorausgesetzt, wird folgendes bey einiger Aufmerksamkeit verständlich seyn.

a, b, c, d, e f - - - x; sollen einfache Zahlen vorstellen; so ist $\overset{r}{a}+\overset{r-1}{b}+\overset{r-2}{c}+\overset{r-3}{d}+\overset{r-4}{e}+\overset{r-5}{f} - - - +\overset{0}{x}$ eine allgemeine Darstellung einer $(r+1)$ ziffrigen Zahl.

Nun ist aus dem Zusatz des 316. §. bekannt, daß

$$\left(\overset{r}{a}+\overset{r-1}{b}+\overset{r-2}{c}+\overset{r-3}{d} - - - +\overset{0}{x}\right)^2$$

$$=\overset{2r}{a^2}+\overset{2r-1}{2ab}+\overset{2r-2}{b^2}$$

$$+2\left(\overset{r}{a}+\overset{r-1}{b}\right)\overset{r-2}{c}+\overset{2r-4}{c^2}=\overset{2r-2}{2ac}+\overset{2r-3}{2bc}+\overset{2r-4}{c^2}$$

$$2\left(\overset{r}{a}+\overset{r-1}{b}+\overset{r-2}{c}\right)\overset{r-3}{d}+\overset{2r-6}{d^3}=\overset{2r-3}{2ad}+\overset{2r-4}{2bd}+\overset{2r-5}{2cd}+\overset{2r-6}{d^3}$$

$$+2\left(\overset{r}{a}+\overset{r-1}{b}+\overset{r-2}{c}+\overset{r-3}{d}\right)\overset{r-4}{e}+\overset{2r-8}{e^2}=\overset{2r-4}{2ae}+\overset{2r-5}{2be}+\overset{2r-6}{2ce}+\overset{2r-7}{2de}+\overset{2r-8}{e^2}$$

$$\vdots$$

$$+2\left(\overset{r}{a}+\overset{r-1}{b}+\overset{r-2}{c}+\overset{r-3}{d} - - - +\overset{1}{w}\right)\overset{0}{x}+\overset{0}{x^2}=\overset{r}{2ax}+\overset{r-1}{2bx}+\overset{r-2}{2cx}+$$

$$\overset{r-3}{2dx} - - - \overset{1}{wx}+\overset{0}{x^2}$$

Um sogleich übersehen zu können, welche Glieder dieser Producte zu einerley Ordnung gehören, so schreibe man die Ordnungsexponenten von der höchsten bis zur niedrigsten in einer Horizontalreihe neben einander hin, und unter diese Ordnungsexponenten setze man in Verticalreihen die zu ihnen gehörigen Glieder, wie folget:

1	2	3	4	5	6	7te Glied		$2r-(r+1)-1$) Glied						u.s.f.
$2r$,	$2r-1$,	$2r-2$,	$2r-3$,	$2r-4$,	$2r-5$,	$2r-6$,	- -	r,	$r-1$,	$r-2$,	$r-3$,	- -	1,	0.
a^2	$2ab$	b^2	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
		$2ac$	$2bc$	c^2	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
			$2ad$	$2bd$	$2cd$	d^2		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
				$2ae$	$2be$	$2ce$		⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
								⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
								$2ax$	$2bx$	$2cx$	$2dx$	-	$2wx$	x^2

Hiebey bemerken wir nun folgendes: die Anzahl der in einer Verticalreihe befindlichen Producte ist immer in zwey zunächst auf einander folgende Verticalreihen gleich, und zwar

in der 1ten und 2ten	ist die	Anzahl der	Producte	1
— 3ten und 4ten	—	—	—	2
— 5ten und 6ten	—	—	—	3
— 7ten und 8ten	—	—	—	4
⋮				⋮
- - $(2n+1)$ten und $2(n+1)$ten	-	-	-	$\frac{2(n+1)}{2}=n+1.$

Man findet also die Anzahl der unter einander stehenden Producte in einer beliebigen Verticalreihe, wenn man zu der Zahl der Reihe, im Fall solche ungerade ist, eins addirt und diese Summe halbirt.

Ferner die höchste Ziffer des doppelten Products zweyer einfachen Zahlen ist höchstens von der 2ten Ordnung; denn $2.9.9=162$, wo 2 von der nullten, 6 von der ersten und 1 von der zweyten Ordnung ist. Da nun 2. 9. 9 keine Ziffern höherer Ordnung geben, so kann das doppelte Product zweyer anderer einfachen Zahlen es um so weniger.

Die zur Ordnung r zugehörige Verticalreihe ist die $(r+1)$te, und die zu Nullten Ordnung gehörige ist die $(2r+1)$te. Nun glaubt sich vielleicht jemand berechtiget nach dem vorhergehenden zu schließen, daß in der $(2r+1)$ten Verticalreihe $\frac{2(r+1)}{2}=r+1$ Producte seyn müssen. Dieses wäre aber doch ganz falsch. Es ist nemlich hier noch eine Betrachtung zu machen, die wir oben absichtlich ausgelassen haben, um den Anfänger aufmerksam darauf zu machen, wie leicht man einen Beweis für richtig und vollständig halten kann, der es doch ganz und gar nicht ist.

Daß

Daß die Anzahl der Producte in der $(2n+1)$ten und $2(n+1)$ten Verticalreihe $= n+1$ sey, ist nur dann richtig, wann $2(n+1)$ kleiner oder gerade die Hälfte aller vorhandenen Verticalreihen ist.

Hier sind $(2r+1)$ Verticalreihen, daher muß $2(n+1) <$ oder $= \frac{2r+1}{2}$ seyn; da aber $2r+1$ eine ungerade Zahl ist, so kann $\frac{2r+1}{2}$ keine ganze Zahl, also auch nicht $2(n+1)$ gleich seyn, es muß daher $2(n+1) < \frac{2r+1}{2}$ seyn. Da $2r+1$ Verticalreihen vorhanden sind, so liegt eine in der Mitte, so daß sie auf jeder Seite r Verticalreihen hat; demnach kann $2(n+1)$ aufs höchste $= r$ seyn, und diese gehört zur $(r+1)$ten Ordnung.

Ist daher r eine gerade Zahl, so ist $\frac{r}{2}$, ist aber r ungerade, so ist $\frac{r+1}{2}$ die größte Anzahl von Producte, welche sich in einer Verticalreihe befinden.

Wenn ich sage, die $r$te Verticalreihe gehört zu $(r+1)$ten Ordnung, so zähle ich diese Reihen von der Linken zur Rechten; zählt man aber von der Rechten zur Linken, also von der Nullten Ordnung an, so gehört zur $r$ten Verticalreihe die $(r-1)$ Ordnung, und diese Reihe hat eben so viel Producte, als die zur $(r+1)$ten Ordnung gehörige.

Von der $(r+1)$ten Verticalreihe auf beyden Seiten gleich weit abstehende Reihen haben also immer gleich viel Glieder, mithin haben die zur nullten und ersten Ordnung gehörige Reihen nur 1 Glied, wie die zur $2r$ten und $(2r-1)$ten Ordnung gehörige Reihen u. s. f.

Der Platz erlaubt nicht, diese sehr nützliche allgemeine Betrachtungen weiter auszudehnen, und an besondern Beispielen die Anwendung zu zeigen. Indessen wird ein heller Kopf aus dem bisher Gesagten doch richtig zu bestimmen im Stande seyn, in welchen Stellen die Theile eines Quadrats einer vieltheiligen Wurzel ihren Anfang nehmen.

VIII. Capitel.

Von der Rechnung mit Irrationalzahlen.

§. 326.

Wenn zwey oder mehr Irrationalformeln zusammen addirt werden sollen, so geschieht solches, wie oben (§. 8.) gelehret worden, indem man alle Glieder mit ihren Zeichen zusammen schreibt. Nur ist bey dem Abkürzen zu bemerken, daß statt $\sqrt{a} + \sqrt{a}$, $2\sqrt{a}$ geschrieben werde, und daß $\sqrt{a} - \sqrt{a}$ einander aufhebe oder nichts gebe. Also diese Formel $3 + \sqrt{2}$ und $1 + \sqrt{2}$ zusammen addirt, giebt $4 + 2\sqrt{2}$ oder $4 + \sqrt{8}$; ferner $5 + \sqrt{3}$ und $4 - \sqrt{3}$ zusammen addirt, giebt 9; ferner $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ und $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ zusammen addirt, macht $3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$.

§. 327.

Eben so wenig Schwierigkeit hat die Subtraction, indem man nur die Zeichen der untern Zahl, welche subtrahirt werden soll, verkehrt lesen und hernach die Größen addiren darf, wie aus folgendem Exempel zu ersehen:

$$\begin{array}{r} 4 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{6} \\ 1 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{5} + 6\sqrt{6} \\ \hline 3 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{6} \end{array}$$

§. 328.

Bey der Multiplication ist nur zu merken, daß $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$ multiplicirt, a giebt. Wenn aber ungleiche Zahlen hinter dem $\sqrt{}$ Zeichen stehen, so giebt $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt, $\sqrt{ab}$, woraus folgende Exempel berechnet werden können:

$1 + \sqrt{1}$

$$\begin{array}{ll} 1+\sqrt{2} & 4+2\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} & 8+4\sqrt{2} \\ \quad +\sqrt{2}+2 & \quad -4\sqrt{2}-4 \\ \hline 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2} & 8-4=4. \end{array}$$

§. 329.

Eben dieses gilt auch von den unmöglichen Größen; wobey nur zu merken, daß $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt, $-a$ giebt.

Wenn man den Cubus von $-1+\sqrt{-3}$ suchen sollte, so geschähe solches, wenn man erstlich das Quadrat nimmt und dasselbe nochmals mit der Zahl $-1+\sqrt{-3}$ multiplicirt, wie folgt:

$$\begin{array}{l} -1+\sqrt{-3} \\ -1+\sqrt{-3} \\ \hline +1-\sqrt{-3} \\ \quad -\sqrt{-3}-3 \\ \hline +1-2\sqrt{-3}-3=-2-2\sqrt{-3}=(-1+\sqrt{-3})^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -1+\sqrt{-3} \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad +2+2\sqrt{-3} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -2\sqrt{-3}+6 \\ \hline \text{alſo } (-1+\sqrt{-3})^3 = \quad 2+6=8 \end{array}$$

§. 330.

Bey der Division hat man nur nöthig, schlechweg einen Bruch zu setzen, und alsdann kann man denselben in eine andere Form verwandeln, so daß der Nenner rational wird. Denn wenn der Nenner $a+\sqrt{b}$ ist, und man oben und unten mit $a-\sqrt{b}$ multiplicirt, so wird der neue Nenner a^2-b seyn und hat also kein Wurzelzeichen mehr. Man dividire z. B. $3+2\sqrt{2}$ durch $1+\sqrt{2}$, so hat man $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Jetzt multiplicire man oben und unten

mit $1 - \sqrt{2}$, so bekommt man für den Zähler

$$\begin{array}{l} 3+2\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ \hline 3+2\sqrt{2} \\ \quad -3\sqrt{2}-4 \\ \hline 3-\sqrt{2}-4=-\sqrt{2}-1 \end{array}$$

für den Nenner

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ \quad -\sqrt{2}-2 \\ \hline 1-2=-1 \end{array}$$

Also ist unser neuer Bruch $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$. Man multiplicire ferner oben und unten mit -1, so bekommt man für den Zähler $+\sqrt{2}+1$, und für den Nenner $+1$.

Es ist auch wirklich $+\sqrt{2}+1$ eben so viel als $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; denn $\sqrt{2}+1$ mit dem Divisor $1+\sqrt{2}$ multiplicirt, giebt $3+2\sqrt{2}$, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ \quad +\sqrt{2}+2 \\ \hline \text{giebt } 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}. \end{array}$$

Ferner $8-5\sqrt{2}$ durch $3-2\sqrt{2}$ dividirt, giebt $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$. Man multiplicire oben und unten mit $3+2\sqrt{2}$, so bekommt man für den Zähler

$$\begin{array}{l} 8-5\sqrt{2} \\ 3+2\sqrt{2} \\ \hline 24-15\sqrt{2} \\ \quad +16\sqrt{2}-20 \\ \hline 24+\sqrt{2}-20=4+\sqrt{2} \end{array}$$

und für den Nenner

$$\begin{array}{l} 3-2\sqrt{2} \\ 3+2\sqrt{2} \\ \hline 9-6\sqrt{2} \\ \quad +6\sqrt{2}-4.2 \\ \hline 9-8=+1 \end{array}$$

Folglich ist der Quotient $4+\sqrt{2}$, wie folgende Probe zeigt:

$$\begin{array}{l} 4+\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} \\ \hline 12+3\sqrt{2} \\ \quad -8\sqrt{2}-4 \\ \hline 12-5\sqrt{2}-4=8-5\sqrt{2}. \end{array}$$

§. 331.

Auf solche Weise können dergleichen Brüche immer in andere verwandelt werden, wovon der Nenner rational ist. Also wenn dieser Bruch $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$ gegeben ist, und man oben und unten mit $5-2\sqrt{6}$ multiplicirt, so wird solcher in diesen verwandelt: $\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5-2\sqrt{6}$.

Ferner: dieser Bruch $\frac{2}{-1+\sqrt{-3}}$ wird in diesen $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$; ferner $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ in $\frac{11+2\sqrt{30}}{1}$ $=11+2\sqrt{30}$ verwandelt.

§. 332.

Wenn in dem Nenner auch mehr Glieder vorkommen, so wird auf eben diese Art nach und nach die Irrationalität aus dem Nenner weggebracht.

Also bey diesem Bruch $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ multiplicirt man erstlich oben und unten mit $\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, so hat man $\frac{+\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$; ferner oben und unten mit $5+2\sqrt{6}$, so hat man $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}$.

Zusatz. Die Analysten kommen bey ihren Untersuchungen öfters auf sonderbare Gleichungen. Z. B. wer sieht wohl auf den ersten Blick ein, daß $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$ sey? und doch kann sich jeder sehr leicht davon auf folgende Art überzeugen:

Man quadrire diese Gleichung, so erhält man:

$1+\sqrt{-3}+2\sqrt{(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})}+1-\sqrt{-3}=6$

oder $2+2\sqrt{1^2-(\sqrt{-3})^2}=6$

oder $2+2\sqrt{1-(-3)}=6$

also $2+2\sqrt{4}=6$

oder $2+2.2=6$.

Eben so findet man, daß $\sqrt{1+2\sqrt{-2}}+\sqrt{1-2\sqrt{-2}}=\sqrt{8}$ und $\sqrt{5+\sqrt{-11}}+\sqrt{5-\sqrt{-11}}=\sqrt{22}$ ist. Ganz allgemein sey $\sqrt{a+\sqrt{-b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{-b}}$ gegeben, so ist $(\sqrt{a+\sqrt{-b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{-b}})^2=a+\sqrt{-b}\pm 2\sqrt{(a+\sqrt{-b})(a-\sqrt{-b})}+a-\sqrt{-b}=2a\pm 2\sqrt{a^2+b}$,

folglich $\sqrt{a+\sqrt{-b}}\pm\sqrt{a-\sqrt{-b}}=\sqrt{2a\pm 2\sqrt{a^2+b}}$

Im ersten Beyspiele ist $a=1$ und $b=3$; im zweyten ist $a=1$ und $b=-8$ (denn $2\sqrt{-2}$ ist $=\sqrt{-8}$) und im 3ten Beyspiele ist $a=5$ und $b=11$.

Setzt man $a=b=1$, so erhält man $\sqrt{1+\sqrt{-1}}+\sqrt{1-\sqrt{-1}}=\sqrt{2+2\sqrt{2}}$; da $2\sqrt{2}>2$ ist (denn $(2\sqrt{2})^2>2^2$), so ist für das + Zeichen der Werth reel, für — aber unmöglich oder imaginair.

Um

Um jedesmal $\sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 + b}}$ unter der Form $\sqrt{A}$ zu erhalten, so daß A rational ist, darf man nur $\sqrt{a^2 + b} = x$ setzen, dieses giebt $b = x^2 - a^2$, wo man alsdann x nach Belieben annehmen kann.

Soll aber $\sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 + b}}$ rational werden, so überlege man, daß $\sqrt{2A}$ nicht anders rational ist, als wenn $A = 2c^2$. Daher setze man $a \pm \sqrt{a^2 + b} = 2c^2$, also $2c^2 - a = \pm\sqrt{a^2 + b}$ und $4c^4 - 4c^2 a + a^2 = a^2 + b$, folglich $b = 4c^2(c^2 - a)$, da kann man c nach Gefallen annehmen, und hat $\sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2 + b}} = \sqrt{4c^2} = 2c$.

IX. Capitel.

Von den Cubiczahlen zusammengesetzter Größen und von der Ausziehung der Cubicwurzeln.

§. 333.

Um den Cubus von der Wurzel $a + b$ zu finden, muß man das Quadrat davon, welches $a^2 + 2ab + b^2$ ist, nochmals mit $a + b$ multipliciren, da dann der Cubus seyn wird:

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Dieser besteht also aus dem Cubus beyder Theile der Wurzel, hernach noch aus $3a^2b + 3ab^2$, welches so viel ist als $(3ab).(a + b)$; und dieses ist das dreyfache Product der beyden Theile mit der Summe derselben multiplicirt.

§. 334.

Wenn also die Wurzel aus zwey Theilen besteht, so läßt sich der Cubus nach dieser Regel leicht finden, als z. B. da die Zahl $5 = 3 + 2$, so ist der Cubus davon $= 27 + 8 + 18 . 5$, ist also $= 125$.

Es sey ferner die Wurzel $7 + 3 = 10$, so wird der Cubus $343 + 27 + 63 . 10 = 1000$.

Um den Cubus von 36 zu finden, so setze man die Wurzel $36 = 30 + 6$ und der Cubus wird seyn:

$$27000 + 216 + 540 . 36 = 46656.$$

Zusatz. Wenn die Wurzel vieltheilig (polynomisch) ist, so enthält die Cubiczahl die Würfel aller Theile, die dreyfachen Producte aus dem Quadrate der Summe aller vorhergehenden Theile in den nächst folgenden, und die dreyfachen Producte aus der Summe aller vorhergehenden Theile in das Quadrat des nächst folgenden.

Beweis:

Es sey $a + b + c + - - - . x$ die vieltheilige Wurzel, so ist der Cubus davon

$$\begin{aligned}
&a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\
&\quad + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3\\
&\quad + 3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3\\
&\quad + 3(a+b+c+d)^2e + 3(a+b+c+d)e^2 + e^3\\
&\quad + 3(a+b+c+d+e)^2f + 3(a+b+c+d+e)f^2 + f^3\\
&\quad \vdots\\
&\quad + 3(a+b+c+d+e - - + w)^2x + 3(a+b+c+d+e - - + w)x^2 + x^3
\end{aligned}$$

Von der Richtigkeit dieser Producte überzeugt man sich folgendergestalt:

man setze $(a+b+c+ - - - - + w + x)^3 = (A + x)^3 = A^3 + 3A^2x + 3Ax^2 + x^3$.

Nun ist

$$3A^2x + 3Ax^2 + x^3 = 3(a + b + c + d + e - - + w)^2x + 3(a + b + c + d + e - - - w)x^2 + x^3$$

Setzt man wieder $A^3 = (B + w)^3 = B^3 + 3B^2w + 3Bw^2 + w^2$, so giebt $3B^2w + 3Bw^2 + w^3$ die zweyte Reihe von unten, und B hat wiederum einen Theil weniger als A.

Eben

Eben so kann jetzt wieder $B^3 = (C+v)^3 = C^3 + 3C^2v + v^3$ setzen, wo C wieder ein Theil weniger als B hat. Fährt man immer so fort, so werden zuletzt nur die zwey Theile $a + b$ übrig bleiben, deren Cubus die oberste Reihe giebt.

Stellen a, b, c, d - - - x bloß einfache Zahlen vor, so ist $\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c} + \overset{r-3}{d} - - - \overset{0}{x}$ eine $r + 1$ ziffrigte Zahl, und

$$\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c} - - - + \overset{0}{x}\right)^3 = \left\{\begin{array}{l} \overset{3r}{a^3} + \overset{3r-1}{3a^2b} + \overset{3r-2}{3ab^2} + \overset{3r-3}{b^3} \\ + 3\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b}\right)^2 \overset{r-2}{c} + 3\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b}\right) \overset{2r-4}{c^2} + \overset{3r-6}{c^3} \\ + 3\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c}\right)^2 . \overset{r-3}{d} + 3\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c}\right) . \overset{2r-6}{d^2} + \overset{3r-9}{d^3} \\ \vdots \\ + 3\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c} + - - \overset{1}{w}\right)^2 \overset{0}{x} + 3\left(\overset{r}{a} + \overset{r-1}{b} + \overset{r-2}{c} + - - \overset{1}{w}\right) \overset{0}{x^2} + \overset{0}{x^3} \end{array}\right.$$

Hieraus siehet man, in welchen Stellen die Theile eines Würfels einer vieltheiligen Wurzel anfangen.

§. 335.

Wenn aber umgekehrt der Cubus gegeben ist, nemlich $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, und man soll davon die Wurzel finden, so ist folgendes zu bemerken.

Erstlich wenn der Cubus nach der Potenz eines Buchstaben ordentlich geschrieben wird, so erkennt man aus dem ersten Gliede a^3 so gleich das erste Glied der Wurzel a, dessen Cubus jenem gleich ist, und wenn man denselben wegnimmt, so behält man diesen Rest: $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, aus welchem das zweyte Glied der Wurzel gefunden werden muß.

§. 336.

Da wir nun schon wissen, daß das zweyte Glied $+ b$ ist, so kommt es hier nur darauf an, wie dasselbe aus dem obigen Rest gefunden werden könne. Es läßt sich aber derselbe Rest durch folgende zwey

Factoren ausdrücken: $(3a^2 + 3ab + b^2) . b$; wenn man also den Rest durch $3a^2 + 3ab + b^2$ dividirt, so erhält man das verlangte zweyte Glied der Wurzel, nemlich $+ b$.

§. 337.

Weil aber das zweyte Glied noch nicht bekannt ist, so ist auch der Theiler noch unbekannt; allein es ist genug, daß wir den ersten Theil dieses Theilers haben, welcher $3a^2$ ist, oder das dreyfache Quadrat des ersten schon gefundenen Theils der Wurzel, und daraus läßt sich schon der andre Theil b finden, woraus hernach der Divisor vollständig gemacht werden muß, ehe man die Division vollendet. Man muß daher alsdann zu $3a^2$ noch $3ab$ hinzufügen, das ist das dreyfache Product des ersten Theils mit dem andern, und hernach b^2, das ist das Quadrat des andern Theils der Wurzel.

§. 338.

Es sey z. B. dieser Cubus gegeben:

$$\begin{array}{r|l}
 & a^3 + 12a^2 + 48a + 64 \,(a + 4 \\
 & a^3 \\ \hline
3a^2 + 12a + 16 & + 12a^2 + 48a + 64 \\
 & + 12a^2 + 48a + 64 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

Es sey ferner dieser Cubus gegeben:

$$\begin{array}{r|l}
 & a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \,(a^2 - 2a + 1 \\
 & a^6 \\ \hline
3a^4 - 6a^3 + 4a^2 & - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 \\
 & - 6a^5 + 12a^4 - 8a^3 \\ \hline
3a^4 - 12a^3 + 12a^2 + 3a^2 - 6a + 1 & 3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \\
 & 3a^4 - 12a^2 + 15a^2 - 6a + 1 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

§. 339.

§. 339.

Hierauf gründet sich auch die gemeine Regel, die Cubicwurzeln aus Zahlen zu finden. Z. B. mit der Zahl 2197, welche sich durch die allgemeine Formel, $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, vorstellen läßt, wird die Rechnung also angestellt:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2197\,(\overset{a}{10} + \overset{b}{3} = 13 \\
a^3 = & 1000 \\
\hline
3a^2 = 300 & 1197 = 3a^2 + 3ab^2 + b^3 \\
3ab = 90 & \\
b^2 = 9 & \\
\hline
3a^2 + 3ab + b^2 = 399 & 1197 = (3a^2 + 3ab + b^2).b \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Es sey ferner der Cubus 34965783 gegeben, woraus die Cubicwurzel gefunden werden soll.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 34965783\,(300 + 20 + 7 = 327 \\
 & 27000000 \\
\hline
270000 & 7965783 \\
18000 & \\
400 & \\
\hline
288400 & 5768000 \\
\hline
307200 & 2197783 \\
6720 & \\
49 & \\
\hline
313969 & 2197783 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

X. Capitel.

Von den höhern Potenzen zusammengesetzter Größen.

§. 340.

Nach den Quadrat- und Cubiczahlen folgen die höhern Potenzen, welche durch Exponenten, wie schon oben gemeldet worden ist, angezeigt zu werden pflegen, nur muß man die Wurzel, wenn sie zusammengesetzt ist, in Klammern einschließen. Also deutet $(a+b)^5$ die fünfte Potenz von $a+b$, und $(a-b)^6$ die sechste Potenz von $a-b$ an. Wie aber diese Potenzen entwickelt werden können, soll in diesem Capitel gezeigt werden.

§. 341.

Es sey demnach $a+b$ die Wurzel, oder die erste Potenz, so werden die höhern Potenzen durch die Multiplication folgendergestalt gefunden:

$$
\begin{array}{l}
(a+b)^1 = a+b \\
\qquad\quad\; a+b \\
\hline
\qquad\quad\; a^2+ab \\
\qquad\qquad\;\; +ab+ab \\
\hline
(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \\
\qquad\quad\; a+b \\
\hline
\qquad\quad\; a^3+2a^2b+ab^2 \\
\qquad\qquad\;\; +a^2b+3ab^2+b^3 \\
\hline
(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
\qquad\quad\; a+b \\
\hline
\qquad\quad\; a^4+3a^3b+a^2b^2+ab^3 \\
\qquad\qquad\;\; +a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\
\hline
(a+b)^4 = a^4 4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
\qquad\quad\; a+b \\
\hline
\qquad\quad\; a^5+4a^4b+6a^3b^2+4a^2b^3+ab^4 \\
\qquad\qquad\;\; +a^4b+4a^3b^2+6a^2b^3+4ab^4+b^5 \\
\hline
(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \\
\qquad\quad\; a+b \\
\hline
\qquad\quad\; a^6+5a^5b+10a^4b^2+10a^3b^3+5a^2b^4+ab^5 \\
\qquad\qquad\;\; +a^5b+5a^4b^2+10a^3b^3+10a^2b^4+5ab^5+b^6 \\
\hline
(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6
\end{array}
$$

u. s. f.

§. 342.

Eben so werden auch die Potenzen von der Wurzel $a - b$ gefunden, welche von den vorigen nur darin unterschieden sind, daß das 2te, 4te, 6te, kurz jedes gerade Glied das Zeichen minus bekommt, wie aus folgendem zu ersehen:

$(a-b)$

$$(a-b)^1 = a-b$$
$$a-b$$
$$a^2-ab$$
$$-ab+b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$a-b$$
$$a^3-2a^2b+2b^2$$
$$-a^2b+2ab^2-b3$$
$$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$a-b$$
$$a^4-3a^3b+3a^2b^2-ab^3$$
$$-a^3b+3a^2b^2-3ab^3+b^4$$
$$(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$$
$$a-b$$
$$a^5-4a^4b+6a^3b^2-4a^2b^3+ab^4$$
$$-a^4b+4a^3b^2-6a^2b^3+4ab^4-b^5$$
$$(a-b)^5 = a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$$
$$a-b$$
$$a^6-5a^5b+10a^3b^2-10a^3b^3+5a^2b^4-ab^5$$
$$-a^5b+5a^4b^2-10a^3b^3+10a^2b^4-3ab^5+b^6$$
$$(a-b)^6 = a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6$$

u. s. f.

Hier bekommen nemlich alle ungerade Potenzen von b das Zeichen —, die geraden aber behalten das Zeichen +, wovon der Grund offenbar ist; denn da in der Wurzel $-b$ steht, so gehen die Potenzen davon folgendergestalt fort: $-b$, $+b^2$, $-b^3$, $+b^4$, $-b^5$, $+b^6$, u. s. f., wo die geraden Potenzen alle das Zeichen +, die ungeraden aber das Zeichen — haben.

§. 343.

§. 343.

Es kommt hier aber diese wichtige Frage vor, wie ohne diese Rechnung wirklich fortzusetzen, alle Potenzen sowohl von $a + b$ als von $a - b$ gefunden werden können? Wobey vor allen Dingen zu merken, daß wenn man die Potenzen von $a + b$ anzugeben im Stande ist, daraus von selbst die Potenzen von $a - b$ entstehen, denn man darf nur die Zeichen der geraden Glieder, nemlich des 2ten, 4ten, 6ten, 8ten u. s. f. verändern. Es kommt daher hier darauf an, eine Regel festzusetzen, nach welcher eine jede Potenz von $a + b$, so hoch dieselbe auch seyn mag, gefunden werden könne, ohne daß man nöthig habe die Rechnung durch alle vorhergehende anzustellen.

§. 344.

Wenn man bey den oben gefundenen Potenzen die Zahlen, die einem jeden Gliede vorgesetzt sind, wegläßt, welche Zahlen die **Coefficienten** genannt werden, so bemerkt man in den Gliedern eine sehr schöne Ordnung. Denn erstlich kömmt eben die Potenz von a vor, welche verlangt wird; in den folgenden Gliedern aber werden die Potenzen von a immer um eins niedriger, die Potenzen von b hingegen steigen immer um eins, so daß die Summe der Exponenten von a und b in allen Gliedern gleich viel beträgt. Wenn man also die zehnte Potenz von $a + b$ verlangt, so werden die Glieder ohne Coefficienten also fort gehen:

$a^{10}, a^9b^1, a^8b^2, a^7b^3, a^6b^4, a^5b^5, a^4b^6, a^3b^7, a^2b^8, a^1b^9, b^{10}$

Zusatz. Die Glieder der nten Potenz von $a + b$ würden ohne Coefficienten in folgender Ordnung stehen:

$a^n, a^{n-1}b, a^{n-2}b^2, a^{n-3}b^3, \text{ - - - } a^{n-r}b^r \text{ - - - } a^{n-n}b^n$.

Von vorne an gezählt ist $a^{n-r}b^r$ das $(r+1)$te Glied, und $a^{n-n}b^n = b^n$ ist das $n+1$ und letzte Glied, also bestehet jede Potenz einer zweytheiligen Größen aus so viel einzelnen Glieder, als

als der um 1 vermehrte Exponent anzeigt. Es versteht sich, daß der Exponent eine ganze Zahl seyn muß.

§. 345.

Es muß also nur noch gezeigt werden, wie man die dazu gehörigen Coefficienten finde, oder mit welchen Zahlen ein jedes Glied multiplicirt werden soll. Was das erste Glied anbetrift, so ist sein Coefficient immer 1 und bey dem zweyten Gliede ist der Coefficient allemal der Exponent der Potenz selbst. Allein für die folgenden läßt sich nicht so leicht eine Ordnung bemerken. Inzwischen wenn diese Coefficienten nach und nach weiter fortgesetzt werden, so kann man leicht so weit gehen als man will, wie aus folgender Tabelle zu sehen:

Potenz: I.	Coefficienten 1, 1.
II.	1, 2, 1.
III.	1, 3, 3, 1.
IV.	1, 4, 6, 4, 1.
V.	1, 5, 10, 10, 5, 1.
VI.	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.
VII.	1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.
VIII.	1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.
IX.	1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.
X.	1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.

u. s. f.

Also wird von $a + b$ die zehnte Potenz seyn:

$$a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}.$$

§. 346.

Bey diesen Coefficienten ist zu merken, daß die Summe derselben für jede Potenz die gleiche Potenz von 2 geben müsse. Denn man setze $a = 1$, und $b = 1$, so wird ein jedes Glied außer dem Coefficienten $= 1$,

so

so daß nur die Coefficienten zusammen genommen werden müssen. Daher denn die zehnte Potenz seyn wird $(1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$.

Eben so verhält es sich auch mit allen übrigen. Also ist für die

Iste $1+1 = 2 = 2^1$.
IIte $1+2+1 = 4 = 2^2$.
IIIte $1+3+3+1 = 8 = 2^3$.
IVte $1+4+6+4+1 = 16 = 2^4$.
Vte $1+5+10+10+5+1 = 32 = 2^5$.
VIte $1+6+15+20+15+6+1 = 64 = 2^6$.
VIIte $1+7+21+35+35+21+7+1 = 128 = 2^7$.
u. s. f.

§. 347.

Bey diesen Coefficienten ist noch zu merken, daß sie vom Anfang bis in die Mitte steigen, hernach aber in eben der Ordnung wieder abnehmen. Bey den geraden steht der größte in der Mitte, bey den ungeraden aber sind zwey mittlere, welche die größten und einander gleich sind.

Die Ordnung selbst aber verdient noch genauer in Erwägung gezogen zu werden, damit man dieselben für eine jede Potenz finden könne, ohne die vorhergehenden erst zu suchen, wozu hier die Regel gegeben werden soll; der Beweis aber davon wird in folgenden Capiteln geführt werden.

§. 348.

Um die Coefficienten für eine gegebene Potenz, als z. B. die siebente zu finden, so schreibe man folgende Brüche der Ordnung nach hinter einander:

$$\frac{7}{1},\ \frac{6}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{6},\ \frac{1}{7}.$$

wo nemlich die Zähler von dem Exponenten der verlangten Potenz anfangen und immer um eins vermindert

mindert werden, die Nenner aber nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. f. fortschreiten. Da nun der erste Coefficient immer eins ist, so giebt der erste Bruch den zweyten Coefficienten; die zwey ersten Brüche mit einander multiplicirt den dritten, die drey ersten mit einander multiplicirt den vierten u. s. f.

Also ist der erste Coefficient = 1, der 2te = $\frac{7}{1} = 7$, der 3te = $\frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} = 21$, der 4te = $\frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} = 35$, der 5te = $\frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4} = 35$, der 6te = $\frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{5} = 21$, der 7te = $21 \cdot \frac{1}{3} = 7$, der 8te = $7 \cdot \frac{1}{7} = 1$.

§. 349.

Also für die zweyte Potenz hat man diese Brüche $\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2}$, daher der erste Coefficient = 1, der 2te $\frac{2}{1} = 2$, der 3te $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Für die dritte Potenz hat man diese Brüche: $\frac{3}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$, daher der erste Coefficient = 1, der 2te $\frac{3}{1} = 3$, der 3te $3 \cdot \frac{2}{2} = 3$, der 4te $\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1$.

Für die vierte Potenz hat man diese Brüche: $\frac{4}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, daher der erste Coefficient = 1, der 2te $\frac{4}{1} = 4$, der 3te $\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} = 6$, der 4te $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 4$, der 5te $\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = 1$.

§. 350.

Diese Regel schaft uns also den Vortheil, daß man nicht nöthig hat die vorhergehenden Coefficienten zu wissen, sondern sogleich für eine jede Potenz die dahin gehörigen Coefficienten finden kann.

Also für die zehnte Potenz schreibt man diese Brüche: $\frac{10}{1}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{10}$. Daher bekommt man den ersten Coefficient = 1, den zweyten Coefficient = $\frac{10}{1} = 10$.

den 3ten = $10 \cdot \frac{9}{2} = 45$, den 4ten = $45 \cdot \frac{8}{3} = 120$,
den 5ten = $120 \cdot \frac{7}{4} = 210$, den 6ten = $210 \cdot \frac{6}{5} = 252$,
den 7ten = $252 \cdot \frac{5}{6} = 210$, den 8ten = $210 \cdot \frac{4}{7} = 120$,
den 9ten = $120 \cdot \frac{3}{8} = 45$, den 10ten = $45 \cdot \frac{2}{9} = 10$,
den 11ten = $10 \cdot \frac{1}{10} = 1$.

§. 351.

Man kann auch diese Brüche so schlecht weg hinschreiben ohne den Werth derselben zu berechnen, und auf diese Art wird es leicht seyn, eine jede Potenz von $a + b$, so hoch dieselbe auch seyn mag, hinzuschreiben.

Also ist die 100te Potenz von $a + b$ oder $(a+b)^{100}$ $= a^{100} + \frac{100}{1} a^{99}b + \frac{100.99.}{1,\ 2} a^{98}b^2 + \frac{100.99.98.}{1.\ 2.\ 3} a^{97}b^3$ $+ \frac{100.99.\ 98.97.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} a^{96}b^4$ u. s. f. woraus die Ordnung der folgenden Glieder leicht zu ersehen.

Zusatz. Die nte Potenz von $(a+b)$ ist also nach dieser Regel folgende:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}.a^{n-1}b^1 + \frac{n.(n-1)}{1.\ 2.}.a^{n-2}b^2 + \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.\ 2.\ 3.} a^{n-3}b^3 + \cdots + \frac{n.(n-1).(n-2).\cdots(n-(r-1))}{1.\ 2.\ 3.\cdots r} a^{n-r}b^r + \cdots \frac{n.(n-1).(n-2).\cdots(n-(n-1))}{1.\ 2.\ 3.\cdots n} a^{n-n}b^n.$$

Der Exponent n ist, wie vorausgesetzt wird, eine ganze Zahl. Der Coefficient des $(r+1)$ten Gliedes (§. 344.) ist $\frac{n.n-1.n-2.\cdots(n-(r-1))}{1.\ 2.\ 3.\cdots r}$, und das letzte oder $(n+1)$te Glied ist $\frac{n.n-1.n-2\cdots(n-(n-1))}{1.\ 2.\ 3\cdots n} a^{n-n}b^n = b^n$.

Setzt man $a = b = 1$, so erhält man

$$(1+1)^n = 2^n = 1 + \frac{n}{1} + \frac{n.n-1}{1.\ 2.} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} + \cdots + \frac{n.(n-1).(n-2).\cdots(n-(r-1))}{1.\ 2.\ 3.\cdots(r-1).\ r} + \cdots$$

Dieses letztere ist ein allgemeiner Beweis 346 §.

XI. Capitel.

Von der Versetzung der Buchstaben, als worauf der Beweis der vorigen Regel beruhet.

§. 352.

Wenn man auf den Ursprung der obigen Coefficienten zurückgehet, so wird man finden, daß jedes Glied so oft vorkommt, als sich die Buchstaben, daraus dasselbe besteht, versetzen lassen, als z. B. bey der zweyten Potenz, kommt das Glied ab zweymal vor, weil man ab und ba schreiben kann; hingegen kommt daselbst a^2 oder aa nur einmal vor, weil die Ordnung der Buchstaben keine Veränderung leidet. Bey der dritten Potenz kann das Glied a^2b oder aab auf dreyerley Weise geschrieben werden, als aab, aba, baa, und deswegen ist der Coefficient auch 3. Eben so bey der vierten Potenz kann das Glied a^3b, oder aaab, auf viererley Weise versetzt werden, als aaab, aaba, abaa, baaa, deswegen ist auch sein Coefficient 4, und das Glied aabb hat 6 zum Coefficienten, weil sechs Versetzungen statt finden, aabb, abba, baba, abab, bbaa, baab. Und so verhält es sich auch mit allen übrigen.

§. 353.

In der That, wenn man erwäget, daß z. B. die vierte Potenz von einer jeden Wurzel, wenn dieselbe auch aus mehr als zwey Gliedern besteht, als $(a+b+c+d)^4$ gefunden wird, wenn diese vier Factoren mit einander multiplicirt werden: I. $a+b+c+d$, II. $a+b+c+d$, III. $a+b+c+d$, und IV. $a+b+c+d$, so muß jeder Buchstabe des ersten mit einem jeden des andern, und ferner mit einem

jeden des dritten, und endlich noch mit einem jeden des vierten multiplicirt werden, daher ein jedes Glied aus 4 Buchstaben bestehen und so vielmal vorkommen wird, als sich desselben Buchstaben unter einander versetzen lassen, woraus denn sein Coefficient bestimmt wird.

§. 354.

Hier kommt es also darauf an zu wissen, wie vielmal eine gewisse Anzahl Buchstaben unter sich versetzt werden kann, wobey insonderheit darauf zu sehen, ob dieselben Buchstaben unter sich gleich oder ungleich sind. Denn wenn alle gleich sind, so findet keine Veränderung statt, weswegen auch die einfachen Potenzen, als a^2, a^3, a^4 u. s. f. alle 1 zum Coefficienten haben.

§. 355.

Wir wollen erstlich alle Buchstaben ungleich annehmen, und bey zweyen, nemlich ab anfangen, wo offenbar zwey Versetzungen statt finden, als ab, ba.

Hat man drey Buchstaben abc, so ist zu merken, daß ein jeder die erste Stelle haben könne, da denn die zwey übrigen zweymal versetzt werden können. Wenn also a zuerst steht, so hat man zwey Versetzungen abc, acb; steht b zuerst, so hat man wieder zwey, bac, bca; und eben so viel, wenn c zuerst steht, cab, cba. Daher in allem die Zahl der Versetzungen $3 . 2 = 6 = 3 . 2 . 1$ seyn wird.

Hat man vier Buchstaben abcd, so kann ein jeder die erste Stelle einnehmen, und in jedem Fall geben die drey übrigen sechs Versetzungen. Daher in allem die Anzahl der Versetzungen $4 . 6 = 24 = 4 . 3 . 2 . 1$ seyn wird.

Hat man fünf Buchstaben abcde, so kann ein jeder die erste Stelle haben und für jede lassen sich die

vier übrigen 24 mal versetzen. Daher die Anzahl aller Versetzungen 5. 24 = 120 = 5. 4. 3. 2. 1.

§. 356.

So groß nun auch immer die Anzahl der Buchstaben seyn mag, wenn dieselben nur alle ungleich unter sich sind, so läßt sich die Anzahl aller Versetzungen ganz leicht bestimmen, wie aus folgender Tabelle zu ersehen.

Anzahl der Buchstaben:	Anzahl der Versetzungen:
I.	1 = 1
II.	2. 1 = 2
III.	3. 2. 1 = 6
IV.	4. 3. 2. 1 = 24
V.	5. 4. 3. 2. 1 = 120
VI.	6. 5. 4. 3. 2. 1 = 720
VII.	7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 5040
VIII.	8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 40320
IX.	9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 362880
X.	10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 3628800

§. 357.

Es ist aber wohl zu merken, daß diese Zahlen nur alsdann statt finden, wenn alle Buchstaben unter sich ungleich sind, denn wenn zwey oder mehr einander gleich sind, so wird die Anzahl der Versetzungen weit geringer; und wenn gar alle einander gleich sind, so hat man nur eine einzige. Wir wollen also sehen, wie nach der Anzahl der gleichen Buchstaben die obigen Zahlen vermindert werden müssen.

§. 358.

Sind zwey Buchstaben einander gleich, so werden die zwey Versetzungen nur für eine gerechnet. Daher die obige Zahl auf die Hälfte gebracht oder durch 2 dividirt werden muß. Sind drey Buchstaben

ben einander gleich, so werden 6 Versetzungen nur für eine gerechnet; daher die obigen Zahlen durch $6 = 3.2.1$ getheilt werden müssen. Eben so wenn vier Buchstaben einander gleich sind, so müssen die obigen Zahlen durch 24, das ist durch $4.3.2.1$ getheilt werden u. s. f.

Hieraus kann man nun bestimmen, wie vielmal diese Buchstaben aaabbc versetzt werden können. Die Anzahl derselben ist sechs, und sie würden, wenn sie ungleich wären, $6.5.4.3.2.1$ Versetzungen zulassen. Weil aber hier a dreymal vorkommt, so muß diese Zahl durch $3.2.1$, und weil b zweymal vorkommt, noch ferner durch 2.1 getheilt werden, daher die Anzahl der Versetzungen $= \frac{6.5.4.3.2.1.}{3.2.1.2.1.} = 5.4.3. = 60$ seyn wird.

§. 359.

Hieraus können wir nun die Coefficienten eines jeden Gliedes für eine jede Potenz bestimmen, welches wir z. B. für die siebente Potenz $(a+b)^7$ zeigen wollen. Das erste Glied ist a^7, welches nur einmal vorkommt, und da in allen übrigen sieben Buchstaben vorkommen, so wäre die Anzahl aller Versetzungen $7.6.5.4.3.2.1$, wenn sie alle ungleich wären. Da aber im zweyten Gliede a^6b, sechs gleiche Buchstaben vorhanden sind, so muß jene Zahl durch $6.5.4.3.2.1$ getheilt werden, daher der Coefficient $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{6.5.4.3.2.1.} = \frac{7}{1} = 7$ seyn wird.

Im dritten Gliede a^5b^2 kommt a fünfmal und b zweymal vor, daher die obige Zahl erstlich durch $5.4.3.2.1$ und noch durch 2.1 getheilt werden muß, daher der Coefficient $= \frac{7.6.5.4.3.2.1.}{5.4.3.2.1.1.2.} = \frac{7.6.}{1.2.}$ seyn wird.

Im vierten Gliede a^4b^3 steht a viermal und b dreymal; daher die obige Zahl erstlich durch $4.3.2.1$

 und

und hernach noch durch 3.2.1 oder 1.2.3 getheilt werden muß, da denn der Coefficient = $\frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.1.2.3}$ = $\frac{7.6.5}{1.2.3}$ seyn wird.

Eben so wird für das fünfte Glied a^3b^4 der Coefficient = $\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}$ u. s. f., wodurch die oben gegebene Regel erwiesen wird.

§. 360.

Diese Betrachtung führt uns aber noch weiter, und lehret, wie man auch von solchen Wurzeln, die aus mehr als zwey Theilen bestehen, alle Potenzen finden soll. Wir wollen dieses nur mit der dritten Potenz von $a + b + c$ erläutern, worin alle mögliche Zusammensetzungen von dreyen Buchstaben als Glieder vorkommen müssen, und ein jedes die Anzahl aller seiner Versetzungen zum Coefficienten haben wird, also wird die dritte Potenz oder $(a+b+c)^3$ seyn:

$$a^3 + 3aab + 3aac + 3abb + 6abc + 3acc + b^3 + 3bbc + 3bcc + c^3.$$

Laßt uns setzen, es sey $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, so wird der Cubus von $1 + 1 + 1$, das ist von 3,

$$1 + 3 + 3 + 3 + 6 + 3 + 1 + 3 + 3 + 1 = 27 \text{ seyn.}$$

Setzt man $a = 1$, $b = 1$ und $c = -1$, so wird der Cubus von $1 + 1 - 1$, das ist von 1,

$$1 + 3 - 3 + 3 - 6 + 3 + 1 - 3 + 3 - 1 = 1 \text{ seyn.}$$

1. Zusatz. Der Unterschied zwischen Permutationen und Combinationen ist folgender:

Permutationen sind die Versetzungen, welche bey einer gegebenen Anzahl von Dingen möglich sind, z. B. die Permutationen von drey Dingen a, b, c sind folgende: abc, acb, bac, bca, cab, cba, wie in diesem Capitel gelehrt worden.

Combinationen (Verwechselungen) entstehen, wenn man aus einer gegebenen Anzahl von Dingen je 2, je 3, je 4 u. s. f. auf alle mögliche Arten verbindet, doch so, daß keine Versetzungen irgend einer Combination zugelassen werden.

Z. B. die

z. B. die Combinationen von den 3 Dingen a, b, c, sind folgende: nimmt man von diesen 3 Dingen je 1 und 1, so hat man 3 Combinationen, nemlich a, b und c, welche man auch einfache Verwechselungen, oder wenn man nach Graden zählen will, Verwechselungen vom ersten Grade nennet. Verbindet man je 2 und 2 dieser Dinge, so hat man 3 zweyfache Verwechselungen, oder 3 Verwechselungen vom 2ten Grade oder Amben, nemlich ab, ac, und bc.

Verbindet man je 3 und 3 diese Dinge, so erhält man nur eine einzige dreyfache Verwechselung, oder eine einzige Verwechselung vom dritten Grade oder Terne, nemlich abc.

Höhere Combinationen können aus 3 Dingen ohne Wiederholung nicht gemacht werden. Da aber bey dem Combiniren zuweilen erlaubt ist, ein Ding öfter als einmal zu setzen, zuweilen nicht, so entstehen zwey Arten von Combinationen,

nemlich 1) mit Wiederholungen,

und 2) ohne Wiederholungen.

Diese 2te Art von Combination ist die eben gezeigte. Sollen jene 3 Dinge mit Wiederholungen combinirt werden, so giebt es folgende Combinationen:

Amben aa, ab, ac, bb, bc, cc.

Ternen aaa, aab, aac, abb, abc, acc, bbb, bbc, bcc, ccc.

Quaternen aaaa, aaab, aaac, aabb u. s. f.

Jede Ambe, Terne, Quaterne u. s. f. nennt man eine Complexion. Jede einzelne Complexion ist öfters noch mehrerer Versetzungen fähig. z. B. die Complexionen aa, bb, cc, oder aaa, bbb u. s. f. sind keiner Versetzungen, aber ab, ac, bc u. s. f. folgender Versetzungen fähig: ba, ca, cb u. s. f. Werden nun diese Versetzungen, die jede einzelne Complexion zuläßt, mitgenommen, so entstehen Variationen.

Die Variationen gehen also aus der Vereinigung von Combinationen und Permutationen hervor. Sie unterscheiden sich von den Combinationen bloß dadurch, daß bey dem Variiren alle Versetzungen, die jede einzelne Complexion zuläßt, mitgenommen werden müssen.

Um die Permutationen, Combinationen und Variationen gegebener Dinge bequem zu finden, bezeichne man die gegebenen Dinge nach der Reihe mit den Ziffern 1, 2, 3 u. s. f. wie folget:

$\overset{1}{a}, \overset{2}{b}, \overset{3}{c}, \overset{4}{d}$ u. s. f. Eine solche bezifferte Reihe gegebener Dinge heißt index oder indiculus.

Sind also die drey Dinge a, b, c gegeben, so ist der index

$\overset{1}{a}, \overset{2}{b}, \overset{3}{c}.$

I.) Um alle Permutationen von diesen drey Dingen zu erhalten, nehme man aus unserm bekannten Zahlensystem alle Zahlen, die mit den drey Ziffern 1, 2, 3 geschrieben werden, in der Ordnung, wie sie im Zahlensysteme folgen, nemlich 123, 132, 213, 231, 312, 321. Legt man diesen Zahlen nach dem Index die Buchstaben unter, so sind die gesuchten Permutationen folgende:

123, 132, 213, 231, 312, 321.
abc acb bac bca cab cba

II.) Combinationen aus diesen drey gegebenen Dingen.

Um alle Amben, Ternen, Quaternen u. s. f. zu erhalten, schreibe man alle zwey-, drey-, vierziffrige Zahlen u. s. f. auf, die bloß die Ziffern 1, 2, 3 enthalten. Aber um keine Versetzungen zu erhalten, behalte man bloß diejenigen Zahlen, in welchen die Ziffern in eben der Ordnung stehen, als in der Reihe der einzelnen gegebenen Dinge, d. h. man lasse alle Zahlen, wie 21, 31, desgleichen 231, 312 u. s. f. weg, wo eine größere Ziffer vor einer kleinern steht.

1. Combinationen mit Wiederholungen:

Amben 11, 12, 13, 22, 23, 33
aa, ab, ac, bb, bc, cc

Ternen 111, 112, 113, 122, 123, 133, 222, 223, 233, 333
aaa, aab, aac, abb, abc, acc, bbb, bbc, bcc, ccc

Quaternen 1111, 1112, 1113, 1122, 1123
aaaa, aaab, aaac, aabb, aabc, u. s. f.

2. Combinationen ohne Wiederholungen:

Amben 12, 13, 23
ab, ac, bc.

Ternen 123
abc

Quaternen und höhere Combinationen können aus 3 Dingen, wie schon oben gesagt ist, ohne Wiederholungen nicht gemacht werden.

III.) Variationen aus eben den drey Dingen:

Man verfahre wie in II. bey den Combinationen, nur daß man von allen Zahlen, die mit den drey Ziffern 1, 2, 3 geschrieben werden können, keine einzige weglassen darf. Man erhält daher folgende:

Amben 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33
aa, ab, ac, ba, ab, bc, ca, cb, cc

Ternen 111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133
aaa, aab, aac, aba, abb, abc, aca, acb, acc
211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233
baa, bab, bac, bba, bbb, bbc, bca, bcb, bcc
311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332, 333
caa, cab, cac, cba, cbb, cbc, cca, ccb, ccc

Quat. 1111, 1112, 1113, 1121, 1122, 1123, 1131, 1132, 1133
aaaa, aaab, aaac, aaba, aabb, aabc, aaca, aacb, aacc
1211, 1212, 1213, 1221, 1222, 1223, 1231, 1232, 1233
abaa, abab, abac, abba, abbb, abbc, abca, abcb, abcc
1311, 1312, 1313, 1321, 1322, 1323, 1331, 1332, 1333
acaa, acab, acac, acba, acbb, acbc, acca, accb, accc
2111, 2112, 2113, 2121, 2122, 2123, 2131, 2132, 2133
baaa, baab, baac, baba, babb, babc, baca, bacb, bacc
2211, 2212, 2213, 2221, 2222, 2223, 2231, 2232, 2233
bbaa, bbab, bbac, bbba, bbbb, bbbc, bbca, bbcb, bbcc
2311, 2312, 2313, 2321, 2322, 2323, 2331, 2332, 2333
bcaa, bcab, bcac, bcba, bcbb, bcbc, bcca, bccb, bccc
3111, 3112, 3113, 3121, 3122, 3123, 3131, 3132, 3133
caaa, caab, caac, caba, cabb, cabc, caca, cacb, cacc
3211, 3212, 3213, 3221, 3222, 3223, 3231, 3232, 3233
cbaa, cbab, cbac, cbba, cbbb, cbbc, cbca, cbcb, cbcc
3311, 3312, 3313, 3321, 3322, 3323, 3331, 3332, 3333
ccaa, ccab, ccac, ccba, ccbb, ccbc, ccca, cccb, cccc
u. s. f.

Variationen sind unter allen combinatorischen Arbeiten die leichtesten. Denn auch ohne Gebrauch von jenen Ziffern zu machen, wird diese Arbeit äußerst leicht auf folgende Art verrichtet.

Man schreibe die gegebenen Dinge, a, b, c u. s. f., die man variiren soll, sowohl horizontal, als auch vertical nach der Reihe, wie sie folgen, hin, und verfahre, wie folgendes Schema genugsam zeigt, so erhält man die Amben.

	a,	b,	c,	d - - -
a	aa,	ab,	ac,	ad - - -
b	ba,	bb,	bc,	bd - - -
c	ca,	cb,	cc,	cd - - -
d	da,	db,	dc,	dd - - -

Um die Ternen zu finden, verfahre man, wie folgendes Schema deutlich vor Augen liegt:

	aa,	ab,	ac,	ad,	ba,	bb,	bc - - -
a	aaa,	aab,	aac,	aad,	aba	abb,	abc - - -
b	baa,	bab,	bac,	bad,	bba,	bbb,	bbc, - - -
c	caa,	cab,	cac,	cad,	cba,	cbb,	cbc - - -
d	daa,	dab,	dac,	dad,	dba,	dbb,	dbc - - -
'	'	'	'	'	'	'	'
'	'	'	'	'	'	'	'

Wie die Quaternen gefunden werden, zeigt folgendes Schema:

	aa,	ab	ac,	ad,	ba,	bb,	bc - - -
aa	aaaa,	aaab,	aaac,	aaad,	aaba,	aabb,	aabc - - -
ab	abaa,	abab	abac	abad	abba,	abbb,	abbc - - -
ac	acaa,	acab,	acac,	acad,	acba,	acbb,	acbc - - -
ad	adaa,	adab,	adac,	adad,	adba,	adbb,	adbc - - -
'	'	'	'	'	'	'	'
'	'	'	'	'	'	'	'

u. s. f.

Man sieht deutlich, daß durch obige Verbindung der einzelnen Dinge mit einander die Amben, durch Verbindung der Amben mit den einzelnen Dingen die Ternen entstehen. Die Quaternen entstehen durch Verbindung der Amben selbst u. s. f.

Ich könnte hier noch manches Lehrreiche mittheilen, wenn es der Platz erlaubte; übergehen darf ich aber nicht, daß die hier von mir mitgetheilte Definitionen von **Permutationen**, **Combinationen (mit und ohne Wiederholung)** und **Variationen**, ganz dem Hindenburgischen Begriff gemäß sind. Dieser große Analyst hat sich durch seine erfundene combinatorische Analytik einen unsterblichen Ruhm erworben. Anfänger erhalten von diesem ganz neuen Zweige der Analysis einen kurzen aber deutlichen Unterricht in einer kleinen vortreflichen Schrift des Herrn Prof. **Fischer: über den Ursprung der Theorie der Dimensionszeichen und ihr Verhältniß gegen die combinatorische Analytik des Herrn Prof. Hindenburg.** Halle, 1794. 4.

2. **Zusatz.** Noch will ich hier einige allgemeine Formeln mit ihren Anwendungen mittheilen.

Formel für alle **Permutationen** von 12 verschiedenen Dingen.

$$n\,(n-1)\,(n-2)\;-\;-\;-\;1. \text{ oder } 1.\,2.\,3.\;-\;-\;-\;n,$$

sind darunter m gleiche Größen, so ist die Anzahl der Permutationen: $= n.(n-1)(n-2) - - - (m+1)$ oder $(m+1)(m+2)(m+3) - - - n$; wären überdem noch p und r gleiche Buchstaben vorhanden, so giebt $\frac{n.(n-1)(n-2)\;-\;-\;(m+1)}{1.\,2.\,3.\;-\;-\;p.\;1.\,2.\,3.\;-\;-\;r}$ die möglichen Permutationen.

Aufg.

Aufg. Wie viel verschiedene 9 ziffrige Zahlen können mit den 9 bekannten Zahlzeichen geschrieben werden?

Aufl. 1. 2. 3 4 5. - - - 9 = 362880.

Aufg. Wie oft können die 24 Buchstaben des Alphabets versetzt werden?

Aufl. 1.2 3 - - 24 = 620 448 401 733 239 439 360000 (mit den Strichen III, II, I über den Ziffern)

Wenn alle Buchstaben dieser Permutationen sollten auf einer Fläche geschrieben werden, und man einem Buchstaben, auch nur eine Quadratlinie, Raum einräumt, so müßte diese Fläche doch 144000mal größer, als die Oberfläche der Erde seyn. Alle jetzt lebende Menschen auf dem ganzen Erdboden würden in 1000 Millionen Jahren nicht alle mögliche Versetzungen der 24 Buchstaben schreiben können, wenn auch jeder täglich 40 Seiten schreibt, deren jede 40 verschiedene Versetzungen der 24 Buchstaben enthält.

3. Zusatz. Formeln für Combinationen mit Wiederholungen von n verschiedenen Dingen:

Amben $= \frac{n.(n+1)}{1.\ 2.}$; Ternen $= \frac{n.(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3.}$; Quaternen $= \frac{n.(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$; also Rnen $= \frac{n.(n+1)(n+2) - - - (n+(r-1))}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ - - -\ r}$

4. Zusatz. Formeln für Combinationen ohne Wiederholungen von n verschiedenen Dingen.

Amben $= \frac{n.(n-1)}{1.\ 2.}$; Ternen $= \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3.}$; Quaternen $= \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$, folglich Rnen $= \frac{n.(n-1)(n-2) - - (n-(r-1))}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ - - -\ r}$.

Aufg. Wie viel Amben, Ternen, Quaternen und Quinternen sind in der Berliner Zahlen-Lotterie?

Aufl. Da die Zahlenlotterie 90 Nummern erhält, so sind die Anzahl der Amben $= \frac{90.\ 89}{1.\ 2.} = 4005$; Ternen $= \frac{90.\ 89.\ 88}{1.\ 2.\ 3.} = 117480$; Quaternen $= \frac{90.\ 89.\ 88.\ 87.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} = 2555190$; und Quinternen $= \frac{90.\ 89.\ 88.\ 87.\ 86.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} = 43949268$.

Aufg. Wenn von 90 Loosen oder Zahlen, die in einem Topfe unter einander gemischt sind, nur 5 als Treffer herausgezogen werden, und Jemand wollte behaupten, daß bey 10 von ihm unter den 90 gewählten Loosen 3 Treffer seyn würden;

den; wie verhält sich da die Wahrscheinlichkeit, daß unter den gewählten 10 Loosen 3 Treffer sich befinden sollten?

Aufl. 90 Loose enthalten $\frac{90.89.88.}{1.\ 2.\ 3.} = 117480$ Ternen, die 5 herausgezogenen Treffer enthalten nur $\frac{5.4.3.}{1.2.\ 3.} = 10$ Ternen, also kommen auf einen Treffer 11748 Fehler.

Da ferner aus 10 gewählten Loosen $\frac{10.9.8.}{1\ 2.\ 3} = 120$ Ternen entstehen, so verhält sich die Wahrscheinlichkeit unter den gewählten 10 Loosen eine Terne zu erhalten, zur Unwahrscheinlichkeit, wie 120 zu 11748, oder wie 10 : 979

Aufg. Es will jemand in die gewöhnliche Zahlen-Lotterie von 90 Nummern so viel Zetteln zu 5 Nummern spielen, damit er alle herausgezogene 5 Nummern auf einem Zettel beysammen habe. Wie viel muß er in allem Zettel setzen? Wie viel Zetteln werden drey, und wie viele werden zwey Treffer enthalten? Auf wie viel Zetteln wird nur ein einzelner Treffer sich befinden? Und endlich, wie viel Zettel werden darunter seyn, worauf sich gar kein Treffer befindet?

Aufl. Da er alle 5 herausgezogene Nummern beysammen auf einem Zettel, d. h. eine Quinterne, haben will; so muß er alle Combinationen der 90 Nummern zu fünfen, nemlich $\frac{90.89.88.87.86}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.} = 43949268$ Zettel setzen, unter welchen er gewiß die Quinterne haben wird. Da nun auch bey den 5 herausgezogenen Nummern $\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 5$ Quaternen möglich sind, woran jede mit allen 90 — 5 = 85 gefehlten Nummern gespielt worden ist; so hat er 5. 85 = 425 Quaternen Ueberdies sind bey den herausgezogenen fünf Nummern $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$ Ternen möglich, welche mit jeder Verbindung zu zweyen der 85 gefehlten Nummern gespielt worden sind; also hat er 10. $\frac{85.84.}{1.\ 2.}$ = 35700 Ternen. Eben so giebt es bey den 5 herausgezogenen Nummern $\frac{5.4.}{1\ 2.} = 10$ Amben, die mit jeder Verbindung zu Dreyen der 85 gefehlten Nummern gespielt worden sind; folglich hat er 10. $\frac{85.84.83}{1.\ 2.\ 3} = 987700$ Amben. Ferner sind die 5 getroffenen Nummern mit jeder Verbindung zu Vieren der 85 gefehlten Nummern gespielt worden; folglich hat er 5. $\frac{85.84.83.82.}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

=

$= 10123925$ einzelne Treffer. Endlich hat er noch $\frac{85.84.83.82.81}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} = 32801517$ Zettel, worauf sich gar kein Treffer befindet.

Aufg. Wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit — beym Würfelspiele mit drey Würfeln? Bey einem bestimmten gleichen Wurfe, etwa alle drey Sechsen zu werfen?

Aufl. Drey Würfel haben 18 Felder, die sich $\frac{18.17.16.}{1.\ 2.\ 3.}$ $= 816$ mal zu Dreyen verbinden lassen; allein weil ein Würfel nicht mehr als ein einziges Feld auf einmal zeigen kann, so müssen von diesen 816 Verbindungen folgende ausgeschlossen werden:

α) Bey jedem Würfel jede Verbindung der sechs Felder zu Dreyen $= \frac{6.5.4}{1.2.3}.\ 3 = 60$;

β) Bey jedem Würfel jede Verbindung der sechs Felder zu Zweyen mit den 12 Feldern der beyden andern Würfel verbunden $= \frac{6.\ 5.}{1.\ 2.}.\ 12.\ 3 = 540$; mithin bleibt die Anzahl der möglichen Verbindungen nur $= 816 - (60 + 540)$ $= 216$. Also verhält sich die Wahrscheinlichkeit zur Unwahrscheinlichkeit, wie $1 : 216$, d. h. im Durchschnitte genommen immer unter 216 Würfen einmal alle drey Sechser fallen.

Anmerk. Ich habe diese Auflösung gewählt, weil sie deutlich zeigt, worin der Hr. Geh. Ober Berg- und Bau-Rath Mönich in seinem Lehrbuch der Math. I. B. I. Anh. §. 15. fehlt, wenn er dieses Verhältniß, wie $1 : 816$ angiebt. Er vergaß nemlich den Abzug in α und β.

5. Zusatz. Formeln für alle Variationen von 12 verschiedenen Dingen.

Man hat n Einfache, n^2 Amben, n^3 Ternen, n^4 Quaternen, n^r Rnen. Wenn man also von n Dingen die Summe aller möglichen Variationen bestimmen will, so ist solche $n + n^2 + n^3 + n^4 - - - + n^r$. Dieses ist eine geometrische Reihe, deren Summe $= \frac{n^{r+1} - n}{n - 1}$ ist, wie weiter hin im 514 §. bewiesen wird. Z. B. Sey $n = r = 24$, so ist $\frac{24^{25} - 24}{24 - 1} =$

$$\frac{32009658644406818986777955348272600}{23} =$$

V IV III II I

1391724288887252999425128493402200.

Diese

Diese ungeheuer große Zahl drückt alle mögliche Variationen von allen 24 Buchstaben des Alphabets aus.

6. Zusatz. In dem Hindenburgischen System findet man auch Combinationen mit Versetzungszahlen, womit es folgende Bewandniß hat.

Die Variationen gegebener Dinge, a, b, c u. s. f. enthalten alle ausführliche geschriebene Versetzungen der Combinationen dieser Dinge. Z. B. die Variationsarten aa, ab, ac, ba, bb, bc ca cb, cc, der 3 Dinge a, b, c; enthalten ab, ac, bc. Diese 3 Amben geben versetzt noch 3 Amben ba, ca, cb, die auch unter jene Variations-Amben befindlich sind; macht man nun diese Versetzungen nicht wirklich, und zeigt man bloß durch eine der Amben ab ac, bc vorgeschriebenen Ziffer an, wie viel Versetzungen sie zulassen, so erhält man aa, 2ab, 2ac, bb, 2bc, cc, und dieses wäre alsdann von a, b, c eine Combination mit Versetzungszahlen, die allemal da statt findet, wo man nicht auf den Unterschied dieser Versetzungen achtet, wie z. B. wenn man $a+b+c$ mit sich selbst multipliciren soll. In der Hindenburgischen combinatorischen Analytik ist dieser Unterschied zwischen Variationen und Combinationen mit Versetzungszahlen sehr wichtig.

XII. Capitel.

Von der Entwickelung der Irrationalpotenzen durch unendliche Reihen.

§. 361.

Da wir gezeigt haben, wie von der Wurzel $a+b$ eine jede Potenz gefunden werden soll, der Exponent mag so groß seyn, als er nur immer will, so sind wir im Stande auf eine allgemeine Art die Potenz von $a+b$ auszudrücken, wenn der Exponent auch unbestimmt, und durch einen Buchstaben n ausgedrückt ist.

Also

Also werden wir nach der oben (§. 359.) gegebenen Regel finden:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2} a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3} a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4} a^{n-4}b^4 \text{ u. s. f.}$$

(§. 351. Zus.)

Beweis. Alle Glieder einer Potenz einer zweytheiligen Wurzel sind Variationen der Theile der Wurzel. In diesen Variationen kommen aber alle mögliche Versetzungen der Combinationen mit Wiederholungen vor, demnach muß auch die Zahl der Versetzungen derselben der Coefficient eines jeden Gliedes seyn.

Nun wissen wir bereits (aus §. 344. Zus.) wie die Glieder von $(a+b)^n$ ohne Coefficienten auf einander folgen; das $(r+1)$te Glied ist $a^{n-r}b^r$; in einem solchen Gliede sind demnach $n-r$, Aen, und r Ben, also überhaupt $n-r+r=n$ Buchstaben, d. h. jedes Glied von $(a+b)^n$ enthält so viel Buchstaben, als der Exponent n Einheiten hat. Wären diese Buchstaben alle verschieden, so würden diese n Buchstaben $n.\,n-1.\,n-2.\,-\,-\,-\,1$ Permutationen geben, (§. 360. 2 Zus.); aber das $(r+1)$te Glied enthält $n-r$ aen, demnach bleiben nur noch $n.\,n-1.\,n-2\,-\,-\,-\,(n-(r-1))$ (§. 360. 2. Zus.) Permutationen, überdem sind in diesem Gliede noch r, ben, also bleiben bloß $\frac{n.\,n-1.\,n-2\,-\,-\,-\,(n-(r-2))(n-(r-1))}{1.\;2.\;3.\;-\,-\,-\,(r-1).\;r}$ Permutationen (§ 360. 2. Zus.) und dieses ist folglich der zum $(r+1)$ten Gliede gehörige Coefficient.

1. Zusatz. Eben so würde man das rte Glied von $(a+b)^n$ gleich $\frac{n.\,n-1.\,n-2\,-\,-\,-\,(n-(r-2))}{1.\;2.\;3.\;-\,-\,-\,(r-1)} a^{n-(r-1)} b^{r-1}$ finden. Aus diesem gefundenen allgemeinen Gliede kann man nun leicht jedes verlangte Glied einer jeden Potenz von einer zweytheiligen Größe finden. Auch sieht man aus dem Beweise und aus diesem Zusatze, daß, wenn man den Coefficienten des rten Gliedes $=R$ setzt, so ist der Coefficient des $(r+1)$ten Gliedes $=R.\frac{n-(r-1)}{r}$.

2. Zusatz.

1,	2,	3,	4	- - -	r		- - -	n,		n+1
n+1,	n,	n−1,	n−2	- - -	n−(r−2)		- - -	2,		1

Die

Die obere Reihe ist der Index der Glieder von $(a+b)^n$ von der Linken angezählt, die untere Reihe ist jene umgekehrt geschrieben. Daraus sieht man nun, welche Glieder, von beyden Enden angezählt, gleich weit abstehen. So stehet z. B. das rte Glied von einem Ende eben so weit ab, als das $(n-(r-2))$ te vom andern Ende; also gehören zu Gliedern, die von den äußersten gleich weit abstehen, einerley Coefficienten. Dieses ließe sich schon daraus schließen, weil einerley herauskommen muß, ob man die Potenz von $(a+b)$ oder von $(b+a)$ macht, d. i. ob man die Reihe von $(a+b)^n$ vorwärts oder rückwärts liest.

3. Zusatz. Das rte Glied von $(a+b)^n$ war

$$\frac{n.\,n-1.\,n-2.\;\text{-}\;\text{-}\,(n-(r-2))}{1.\;2.\;3\;\text{-}\;\text{-}\;(r-1)}\,a^{n-(r-1)}\,b^{r-1}.$$

Setzt man $r = n+2$, so erhält man das $(n+2)$te Glied gleich

$$\frac{n.\,n-1.\,n-2.\;\text{-}\;\text{-}\;(n-(n+2)-2))}{1.\;2.\;3.\;\text{-}\;\text{-}\;\text{-}\;(n+1)}\,a^{n-(n+1)}\,b^{n+1},$$

bey welchem Gliede der Coefficient und also das Glied selbst null ist. Eben so verhält es sich auch mit jedem noch folgenden Gliede, denn ihr Coefficient ist immer ein Product, von welchem der eine Factor der Coefficient des $(n+2)$ten Gliede ist. So muß es auch seyn, denn es können, wenn n eine ganze positive Zahl ist, nur $(n+1)$ Glieder statt finden.

4. Zusatz. Jetzt will ich noch zeigen, wie man die nte Potenz von $(a+b)$ unter eine einfachere Gestalt bringen kann, welche bey vielen Anwendungen bequemer ist.

Wir haben nemlich gefunden, daß

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}.\,a^{n-1}b + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\,a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\,a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.\,a^{n-4}b^4\;\text{-}\;\text{-}\;\text{-}$$

Dieses ist nun $= a^n + \frac{n}{1}.a^n.\frac{b}{a} + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.a^n\frac{b^2}{a^2} +$

$$\frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\;2.\;3.}\,a^n\frac{b^3}{a^3} + \frac{n}{1}\,\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.\,a^n\frac{b^4}{a^4} + \text{-}\;\text{-}\;\text{-}$$

Man setze nun den Quotienten von $\frac{b}{a} = Q$, so ist das

1ste Glied $= a^n$ = — — — A

2te - - $= \frac{n}{1}A.Q$ = — — — B

3te - - $= \frac{n-1}{2}.B.Q$ = — — — C

das

das 4te Glied = $\frac{n-2}{3}$. C. Q = — — — D

5te - - = $\frac{n-3}{4}$. D. Q = — — — E

6te - - = $\frac{n-4}{5}$ E. Q = — — — F

7te - - = $\frac{n-5}{6}$. F. Q = — — — G

u. s. f.

also $(a+b)^n = A + \frac{n}{1} A. Q + \frac{n-1}{2}. B. Q + \frac{n-2}{3}. C. Q + \frac{n-3}{4}. D. Q + - - -$

Ferner $(a-b)^n = A - \frac{n}{1} A. Q + \frac{n-1}{2}. B. Q - \frac{n-2}{3}. C. Q + \frac{n-3}{4}. D. Q - - - -$

Hier werden nemlich alle Glieder negativ, worin ungerade Potenzen von b vorkommen, das wäre also hier das 2te, 4te, 6te Glied u. s. f.

Ist n gerade, so müssen, da (n+1) Glieder da sind, $\frac{n}{2}$ Glieder auf jeder Seite des mittlern Gliedes liegen, und die von diesem gleich weit abstehende Glieder haben einerley Coefficienten.

Ist n ungerade, so ist die Zahl der Glieder (n+1) gerade, daher alsdann $\frac{n+1}{2}$ Glieder vorwärts und rückwärts einerley Coefficienten haben.

§. 362.

Wollte man die gleiche Potenz von der Wurzel a — b nehmen, so darf man nur die Zeichen des 2ten, 4ten, 6ten Gliedes u. s. f. verandern, und man hat daher: $(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}. a^{n-2}b^2 - \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3} a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4} a^{n-4}b^4$ u. s. f.

1. Zusatz. Wenn der Exponent n eine gebrochene Zahl ist, so giebt es für $(a+b)^n$ kein letztes Glied.

O Beweis

Beweis. Denn wenn die Potenz aus einer bestimmten Anzahl von Gliedern bestehen soll; so ist nöthig, daß man bey wirklicher Bestimmung dieser Glieder (§. 361. 3 Zus.) auf einen Coefficienten komme, der $= 0$ ist; welches aber bey dieser Voraussetzung nicht geschehen kann.

Man setze nemlich, der Coefficient des $(r+1)$ten Gliedes, also auch das Glied selbst sey gleich Null, so haben wir folgende Gleichung:

$$\frac{n.\,n-1.\,n-2\;\text{- - -}\;(n-(r-2))(n-(r-1))}{1.\quad 2.\quad 3.\;\text{- - - -}\;(r-1)\,.\,r} = 0$$

mit $\frac{n.\,n-1.\,n-2\;\text{- - -}\;(n-(r-2))}{1.\quad 2.\quad 3.\;\text{- - -}\;(r-1).\,r}$ dividirt, giebt

$$n-(r-1) = 0, \text{ folglich } n = r-1.$$

Da nun r eine ganze Zahl seyn muß, so ist auch $r-1$ eine ganze Zahl, daher müßte auch n eine ganze Zahl seyn, welches wider die Voraussetzung ist.

2. Zusatz. Wenn man in der Formel $(a+b)^n = A + \frac{n}{1}.A.Q + \frac{n-1}{2}.B.Q + \frac{n-2}{3}.C.Q$ - - - überall statt n die gebrochene Zahl $\frac{p}{q}$ setzt, so ist

$$(a+b)^{\frac{p}{q}} = A + \frac{p}{q}A.Q + \frac{p-q}{2q}.B.Q + \frac{p-2q}{3q}C.Q + \frac{p-3q}{4q}.D.Q + \frac{p-4q}{5q}E.Q + \text{- - -}$$

3. Zusatz. Wir wollen diese Formeln mit einigen Beyspielen erläutern:

I.) $(\frac{1}{2}x + 2y)^5$ zu bestimmen.

Hier ist $a = \frac{1}{2}x$; $Q = \frac{2y}{\frac{1}{2}x} = \frac{4y}{x}$, und $n = 5$; also ist nach §. 361. 4. Zus.

$a^n = (\frac{1}{2}x)^5 = \frac{1}{32}x^5 =$ — — — A

$\frac{n}{1}.A.Q = 5.\frac{1}{32}x^5.\frac{4y}{x} = \frac{5}{8}x^4y =$ — B

$\frac{n-1}{2}.B.Q = \frac{4}{2}.\frac{5}{8}x^4y.\frac{4y}{x} = 5x^3y^2 =$ — C

$\frac{n-2}{3}.C.Q = 5.x^3y^2.\frac{4y}{x} = 20x^2y^3 =$ — D

$\frac{n-3}{4}.D.Q = \frac{2}{4}.20x^2y^3.\frac{4y}{x} = 40xy^4 =$ E

$\frac{n-4}{5}$

$\frac{n-4}{5}$. E. Q $= \frac{1}{5}.40xy^4.\frac{4y}{x} = 32y^5 =$ — F

$\frac{n-5}{5}$. F. Q $= 0$.

Also ist $(\frac{1}{2}x+2y)^5 = \frac{1}{32}x^5 + \frac{5}{8}x^4y + 5x^3y^2 + 20x^2y^3 + 40xy^4 + 32y^5$.

II.) Man soll $\sqrt[10]{(1+x)^{10}.(1-x)}$ angeben.

Da $\sqrt[10]{(1+x)^{10}(1-x)} = (1+x)(1-x)^{\frac{1}{10}}$ ist, so muß man $(1-x)^{\frac{1}{10}}$ suchen, und es sodann mit $1+x$ multipliciren. Nun findet sich hier $a=1$; $Q = \frac{-x}{1} = -x$; $p=1$; $q=10$.

Für diese Werthe findet man nun die ersten Glieder von $(1-x)^{\frac{1}{10}}$ auf folgende Art, und man kann noch, so viel man will, Glieder davon auf gleiche Art bestimmen.

$a^{\frac{1}{10}} = 1 =$ — — — A

$\frac{p}{q}$. A. Q $= \frac{1}{10}.-x = -\frac{1}{10}x =$ — B

$\frac{p-q}{2q}$. B. Q $= \frac{-9}{20}.-\frac{1}{10}x.-x = \frac{-9x^2}{20.10} =$ C

$\frac{p-2q}{3q}$. C. Q $= \frac{-19}{30}.\frac{-9x^2}{20.10}.-x = \frac{-171.x^3}{30.20.10} =$ D

$\frac{p-3q}{4q}$. D. Q $= \frac{-29}{40}.\frac{-171.x^3}{30.20.10}.-x = \frac{-4959.x^4}{40.30.20.10} =$ E

u. s. f.

Daher ist

$$(1-x)^{\frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10}x - \frac{9x^2}{200} - \frac{171x^3}{6000} - \frac{4959x^4}{240000} - - -$$

Multiplicirt man nun dieses mit $1+x$, so findet man

$$(1+x)(1-x)^{\frac{1}{10}} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{10}x - \frac{9x^2}{200} - \frac{171.x^3}{6000} - \frac{4959x^4}{240000} \\ +x - \frac{1}{10}x^2 - \frac{9x^3}{200} - \frac{171x^4}{6000} - - - \end{cases}$$

$$= 1 + \frac{9}{10}x - \frac{29x^2}{200} - \frac{147.x^3}{2000} - \frac{3933.x^4}{80000} - - -$$

§. 363.

Diese Formeln dienen, um alle Arten von Wurzeln auszudrücken. Denn da wir gezeigt haben, wie die Wurzeln auf gebrochene Exponenten gebracht

 werden

werden können, und daß $\sqrt[2]{}\,a = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{}\,a = a^{\frac{1}{3}}$ und $\sqrt[4]{}\,a = a^{\frac{1}{4}}$ u. s. f. so wird auch seyn:

$\sqrt[2]{}\,(a+b) = (a+b)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{}\,(a+b) = (a+b)^{\frac{1}{3}}$ und $\sqrt[4]{}\,(a+b) = (a+b)^{\frac{1}{4}}$ u. s. f.

Wir haben daher, um die Wurzel von $a+b$ zu finden, nur nöthig, in der obigen allgemeinen Formel für den Exponenten n den Bruch $\frac{1}{2}$ zu setzen, daher wir erstlich für die Coefficienten bekommen werden:

$\frac{n}{1} = \frac{1}{2}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{3}{6}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8}$, $\frac{n-4}{5} = -\frac{7}{10}$, $\frac{n-5}{6} = -\frac{9}{12}$. Hernach ist $a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{}\,a$ und $a^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{a}}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a\sqrt{a}}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^2\sqrt{a}}$ u. s. f.

Oder man kann diese Potenzen von a auch so ausdrücken: $a^n = \sqrt{}\,a$, $a^{n-1} = \frac{\sqrt{a}}{a}$, $a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$, $a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3} = \frac{\sqrt{a}}{a^3}$, $a^{n-4} = \frac{a^n}{a^4} = \frac{\sqrt{a}}{a^4}$ u. s. f.

§. 364.

Dieses vorausgesetzt, wird die Quadratwurzel aus $a+b$ folgendergestalt ausgedrückt werden: $\sqrt{}\,(a+b) = \sqrt{}\,a + \frac{1}{2}b\frac{\sqrt{a}}{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\,b^2\frac{\sqrt{a}}{a^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\,b^3\frac{\sqrt{a}}{a^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\,b^4\frac{\sqrt{a}}{a^4}$ u. s. f.

§. 365.

Wenn nun a eine Quadratzahl ist, so kann $\sqrt{}\,a$ angegeben, und also die Quadratwurzel aus $a+b$, ohne Wurzelzeichen durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden.

Also

Also wenn $a = c^2$, so ist $\sqrt{a} = c$, und man wird haben: $\sqrt{(c^2 + b)} = c + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{c} - \frac{1}{8} \cdot \frac{b^2}{c^3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{b^3}{c^5} - \frac{5}{128} \cdot \frac{b^4}{c^7}$ u. s. f.

Hierdurch kann man aus einer jeden Zahl die Quadratwurzel ausziehen, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zertheilen läßt, wovon einer ein Quadrat ist, welcher durch c^2 angedeutet wird. Will man z. B. die Quadratwurzel von 6 haben, so setzt man $6 = 4 + 2$, und da wird $c^2 = 4$, also $c = 2$ und $b = 2$, daher bekommt man $\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{5}{1024}$ u. s. f. Nimmt man hiervon nur die zwey ersten Glieder, so bekommt man $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, wovon das Quadrat $\frac{25}{4}$ nur um $\frac{1}{4}$ größer ist als 6. Nimmt man drey Glieder, so hat man $2\frac{7}{16} = \frac{39}{16}$, wovon das Quadrat $\frac{1521}{256}$ nur um $\frac{15}{256}$ zu klein ist.

§. 366.

Bey eben diesem Exempel, weil $\frac{5}{2}$ der Wahrheit schon sehr nahe kommt, so kann man $6 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4}$ setzen.

Also wird $c^2 = \frac{25}{4}$, $c = \frac{5}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$, woraus wir nur die zwey ersten Glieder berechnen wollen, da denn $\sqrt{6} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{20} = \frac{49}{20}$ herauskommt, wovon das Quadrat $\frac{2401}{400}$ nur um $\frac{1}{400}$ größer ist als 6.

Setzen wir nun $6 = \frac{2401}{400} - \frac{1}{400}$, so wird $c = \frac{49}{20}$ und $b = -\frac{1}{400}$. Hieraus wieder nur die zwey ersten Glieder genommen, geben $\sqrt{6} = \frac{49}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} = \frac{49}{20} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} = \frac{49}{20} - \frac{1}{1960} = \frac{4801}{1960}$, wovon das Quadrat $= \frac{23049601}{3841600}$. Nun aber ist $6 = \frac{23049600}{3841600}$, also ist der Fehler nur $\frac{1}{3841600}$.

§. 367.

Eben so kann man auch die Cubicwurzel aus $a+b$ durch eine unendliche Reihe ausdrücken. Denn da $\sqrt[3]{}(a+b) = (a+b)^{\frac{1}{3}}$, so wird in unserer allgemeinen Formel $n = \frac{1}{3}$, und daher für die Coefficienten $\frac{n}{1} = \frac{1}{3}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{5}{9}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{2}{3}$, $\frac{n-4}{5} = -\frac{11}{15}$ u. s. f.

Für die Potenzen von a aber ist $a^n = \sqrt[3]{}a$, $a^{n-1} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$, $a^{n-2} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a^2}$, $a^{n-3} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}$ u. s. f., daher erhalten wir $\sqrt[3]{}(a+b) = \sqrt[3]{}a + \frac{1}{3}.b\frac{\sqrt[3]{a}}{a} - \frac{1}{9}.b^2\frac{\sqrt[3]{a}}{a^2} + \frac{5}{81}.b^3\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3} - \frac{10}{243}.b^4\frac{\sqrt[3]{a}}{a^4}$ u. s. f.

§. 368.

Wenn also a ein Cubus, nemlich $a = c^3$, so wird $\sqrt[3]{}a = c$, und also fallen die Wurzelzeichen weg. Daher haben wir:

$$\sqrt[3]{}(c^3+b) = c + \frac{1}{3}.\frac{b}{c^2} - \frac{1}{9}.\frac{b^2}{c^5} + \frac{5}{81}.\frac{b^3}{c^8} - \frac{10}{243}.\frac{b^4}{c^{11}} \text{ u. s. f.}$$

§. 369.

Durch Hülfe dieser Formel kann man nun die Cubicwurzel von einer jeden Zahl durch Annäherung finden, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zertheilen läßt, wie c^3+b, wovon der erste ein Cubus ist.

Also wenn man die Cubicwurzel von 2 verlangt, so setze man $2 = 1+1$, und so wird $c = 1$ und $b = 1$, folg-

folglich $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81}$ u. s. f., wovon die zwey ersten Glieder $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ geben, dessen Cubus $\frac{64}{27}$ um $\frac{10}{27}$ zu groß ist. Man setze daher $2 = \frac{64}{27}$, so wird $c = \frac{4}{3}$ und $b = -\frac{10}{27}$, und daher

$\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}}$. Diese zwey Glieder geben $\frac{4}{3} - \frac{5}{72} = \frac{91}{72}$, wovon der Cubus $\frac{753571}{373248}$ ist. Nun aber ist $2 = \frac{746496}{373248}$, also ist der Fehler $\frac{7075}{373248}$. Und solchergestalt kann man, wenn man will, immer näher kommen, besonders wenn man noch mehr Glieder nehmen will.

Anmerk. Ich werde im Anhange noch einige hierher gehörige Formeln mittheilen, welche in der Ausübung sehr brauchbar sind. Immer wird die hier gelehrte Näherung bequemer seyn, als die Arbeit der gewöhnlichen Rechenkunst.

XIII. Capitel.

Von der Entwickelung der negativen Potenzen.

§. 370.

Es ist oben gezeigt worden, daß $\frac{1}{a}$ durch a^{-1} ausgedrückt werden kann, daher wird auch $\frac{1}{a+b}$ durch $(a+b)^{-1}$ ausgedrückt, so daß der Bruch $\frac{1}{a+b}$ als eine Potenz von $a+b$, deren Exponent -1 ist, kann angesehen werden: daher die oben gefundene Reihe für $(a+b)^n$ auch für diesen Fall gehört.

§. 371.

Da nun $\frac{1}{a+b}$ so viel ist als $(a+b)^{-1}$, so setze man in der oben gefundenen Formel $n = -1$, so

 wird

wird man erstlich für die Coefficienten haben: $\frac{n}{1} = -1$, $\frac{n-1}{2} = -1$, $\frac{n-2}{3} = -1$, $\frac{n-3}{4} = -1$, $\frac{n-4}{5} = -1$ u. s. f. hernach für die Potenzen von a: $a^n = a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^2}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^3}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^4}$ u. s. f. Daher erhalten wir $(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6}$ u. s. f., welches eben diejenige Reihe ist, die schon oben (§. 303.) durch die Division gefunden worden.

§. 372.

Da ferner $\frac{1}{(a+b)^2}$ so viel ist als $(a+b)^{-2}$, so kann auch diese Formel in eine unendliche Reihe aufgelöset werden.

Man setze nemlich $n = -2$, so hat man erstlich für die Coefficienten: $\frac{n}{1} = -\frac{2}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{3}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{4}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{5}{4}$ u. s. f. und für die Potenzen von a hat man $a^n = \frac{1}{a^2}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^3}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^5}$ u. s. f. daher erhalten wir $(a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{1}\cdot\frac{b}{a^3} + \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\frac{b^2}{a^4}, - \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\frac{b^3}{a^5} + \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{b^4}{a^6}$ u. s. f. Nun aber ist $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2} = 3$, $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3} = 4$, $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4} = 5$ u. s. f. Also werden wir haben: $\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - 2\frac{b}{a^3} + 3\frac{b^2}{a^4} - 4\frac{b^3}{a^5} + 5\frac{b^4}{a^6} - 6\frac{b^5}{a^7} + 7\frac{b^6}{a^8}$ u. s. f.

§. 373.

Setzen wir weiter $n = -3$, so bekommen wir eine Reihe für $(a+b)^{-3}$, das ist für $\frac{1}{(a+b)^3}$. Für die Coefficienten wird also seyn: $\frac{n}{1} = -\frac{3}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{4}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{5}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{6}{4}$ u. s. f., für die Potenzen von a aber $a^n = \frac{1}{a^3}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^5}$ u. s. f. Hieraus erhalten wir $\frac{1}{(a+b)^3} = \frac{1}{a^3} - \frac{3}{1}\frac{b}{a^4} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\frac{b^2}{a^5} - \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\frac{b^3}{a^6} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\frac{b^4}{a^7}$ u. s. f. $= \frac{1}{a^3} - 3\frac{b}{a^4} + 6\frac{b^2}{a^5} - 10\frac{b^3}{a^6} + 15\frac{b^4}{a^7} - 21\frac{b^5}{a^8} + 28\frac{b^6}{a^9} - 36\frac{b^7}{a^{10}} + 45\frac{b^8}{a^{11}}$ u. s. f.

Wir wollen nun ferner annehmen $n = -4$, so haben wir für die Coefficienten: $\frac{n}{1} = -\frac{4}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{5}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{6}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{7}{4}$ u. s. f.

Für die Potenzen von a aber $a^n = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^5}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^6}$, $a^{n-3} = \frac{1}{a^7}$, $a^{n-4} = \frac{1}{a^8}$ u. s. f., woraus gefunden wird: $\frac{1}{(a+b)^4} = \frac{1}{a^4} - \frac{4}{1}\frac{b}{a^5} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\frac{b^2}{a^6} - \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\frac{b^3}{a^7} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\frac{b^4}{a^6}$ u. s. f. $= \frac{1}{a^4} - 4\frac{b}{a^5} + 10\frac{b^2}{a^6} - 20\frac{b^3}{a^7} + 35\frac{b^4}{a^8} - 56\frac{b^5}{a^9}$ u. s. f.

§. 374.

Hieraus können wir nun sicher schließen, daß man für eine jede dergleichen negative Potenz auf eine allgemeine Art haben werde:

$$\frac{1}{(a+b)^m} = \frac{1}{a^m} - \frac{m}{1} \cdot \frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \frac{b^2}{a^{m+2}} - \frac{m}{1} \cdot \frac{m+1}{2} \cdot \frac{m+2}{3} \frac{b^3}{a^{m+3}} \text{ u. s. f.}$$

Aus welcher Formel nun alle dergleichen Brüche in unendliche Reihen verwandelt werden, wo man auch sogar für m Brüche annehmen kann, um irrationale Formen auszudrücken.

1. Zusatz. Wenn bey $(a+b)^n$ der Exponent n negativ ist, so giebt es kein letztes Glied für die Potenz.

Beweis. Es müßte, wie in §. 362. 1. Zusatz, das $(r+1)$te Glied Null seyn, nemlich

$$\frac{n.n-1.n-2. \;-\;-\;-\; (n-(r-2))(n-(r-1))}{1.\;2.\;3\;-\;-\;-\;(r-1).\;r} = 0$$

also $n-(r-1)=0$, folglich $n=r-1$.

Da aber der Voraussetzung gemäß n negativ ist, so haben wir

$$\begin{array}{l} -n = r-1 \\ +n = +\;n \\ \hline 0 = n+r-1, \end{array}$$

welches ungereimt ist.

Dieses erhellet freilich auch schon so: $(a+b)^{-n} = \frac{1}{(a+b)^n}$, aber $\frac{1}{a+b}$ giebt eine unendliche Reihe, wie man im 5ten Cap. des II. Abschnitts gesehen hat, daher auch $\left(\frac{1}{a+b}\right)^n = \frac{1}{(a+b)^n}$ eine Reihe von unendlich viel Glieder geben wird.

2. Zusatz. Da $(a+b)^{-n} = a^{-n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n}$, so setze man $\frac{b}{a} = y$ und $\frac{y}{1+y} = z$, also $\frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}} = \frac{b}{a+b} = z$; ferner folgt aus $\frac{y}{1+y} = z$, daß $y = z + zy$ und $y - zy = z$, oder $y(1-z) = z$.

$= z$. Daher $y = \frac{z}{1-z}$, und $1+y = 1+\frac{z}{1-z} = \frac{1-z+z}{1-z} = \frac{1}{1-z}$ und $(1+y)^{-n} = \frac{1}{(1-z)^{-n}} = (1-z)^n$.

Nun ist $(1-z)^n = 1 - \frac{n}{1}.z + \frac{n.n-1}{1.\ 2}z^2 - \frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}z^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}z^4 - - -$

In dieser Reihe setze man statt z seinen ihm gleichen Werth $\frac{b}{a+b}$ und multiplicire jedes Glied mit $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, so erhält man $(a+b)^{-n} = a^{-n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{a^n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n} = \frac{1}{a^n}(1+y)^{-n}$ $= \frac{1}{a^n}(1-z)^n = \frac{1}{a^n} - \frac{n}{1}.\frac{b}{a^n(a+b)} + \frac{n.n-1.}{1.\ 2}.\frac{b^2}{a^n(a+b)^2} - \frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}.\frac{b^3}{a^n(a+b)^3} + - - -$

Diese Reihe bricht ab, wenn $-n$ eine ganze verneinte Zahl ist. Dieses scheint dem obigen Satz zu widersprechen, worin ausdrücklich gesagt wird, daß für $-n$ kein letztes Glied statt findet, d. i. die Reihe unendlich ist.

Mit diesem Widerspruch verhält es sich so: durch geschickte Substitution erhielten wir oben $(a+b)^{-n} = \frac{1}{a^n}\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^n$. Was hier linker Hand der Gleichung stehet, giebt eine unendliche, was rechter Hand stehet, eine endliche Reihe. Ueberdem ist bewiesen, daß für $-n$ nie eine endliche Reihe entstehen kann; dieses läßt schon vermuthen, daß der Grund in der Substitution liegen muß; wir haben nemlich $\frac{y}{1+y} = z$ gesetzt, also läßt sich $z = \frac{b}{a+b}$ durch $y = \frac{b}{a}$ nicht anders als durch eine unendliche Reihe ausdrücken. Das Unendliche in $(a+b)^{-n}$ wird also durch $\frac{1}{a^n}(1-z)^n = \frac{1}{a^n}\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^n$ nicht aufgehoben, sondern nur versteckt.

Anmerk. Der für $(a\pm b)^n$ aus der Combinationslehre hergeleitete Beweis gilt nur, wenn n eine ganze positive Zahl ist. Daß aber dieser Satz auch für gebrochene, negative, irrationale und unmögliche Größen wahr ist, bedarf einer weitläufigeren Rechtfertigung, die wenigstens an diesem Orte nicht mitgetheilt werden kann.

§. 375.

§. 375.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch folgendes anführen: da wir gefunden haben, daß

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ u. s. f.}$$

so wollen wir diese Reihe mit $a+b$ multipliciren, weil alsdann die Zahl 1 herauskommen muß. Die Multiplication wird aber also zu stehen kommen:

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ u. s. f.}$$

$$a + b$$

$$1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^3} - \frac{b^5}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

$$+ \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

Product 1, wie nothwendig folgen muß.

§. 376.

Da wir ferner gefunden haben: $\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7}$ u. s. f., so muß, wenn man diese Reihe mit $(a+b)^2$ multiplicirt, ebenfalls 1 herauskommen. Es ist aber $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und die Multiplication wird also zu stehen kommen:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7} \text{ u. s. f.}$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$1 - \frac{2b}{a} + \frac{3b^2}{a^2} - \frac{4b^3}{a^3} + \frac{5b^4}{a^4} - \frac{6b^5}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

$$+ \frac{2b}{a} - \frac{4b^2}{a^2} + \frac{6b^3}{a^3} - \frac{8b^4}{a^4} + \frac{10b^5}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

$$+ \frac{b^2}{a^2} - \frac{2b^3}{a^3} + \frac{3b^4}{a^4} - \frac{4b^5}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

Product 1, wie die Natur der Sache erfordert.

§. 377.

Sollte man aber diese für $\frac{1}{(a+b)^2}$ gefundene Reihe nur mit $a+b$ multipliciren, so müßte $\frac{1}{a+b}$ herauskommen, oder die für diesen Bruch oben gefundene Reihe $\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6}$ u. s. f. welches auch die folgende Multiplication bestätigen wird.

$$\frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} \text{ u. s. f.}$$

$$a+b$$

$$\frac{1}{a} - \frac{2b}{a^2} + \frac{3b^2}{a^3} - \frac{4b^3}{a^4} + \frac{5b^4}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

$$+ \frac{b}{a^2} - \frac{2b^2}{a^3} + \frac{3b^3}{a^4} - \frac{4b^4}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

Ende des zweyten Abschnitts.

Des

Ersten Theils

Dritter Abschnitt.

Von

den Verhältnissen und Proportionen.

Des Ersten Theils Dritter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

I. Capitel.

Von den arithmetischen Verhältnissen, oder von dem Unterschiede zwischen zwey Zahlen.

§. 378.

Zwey Größen sind entweder einander gleich, oder ungleich. Im letztern Fall ist eine größer als die andere, und wenn man nach ihrer Ungleichheit fragt, so kann dies auf zweyerley Weise geschehen; man fragt entweder, um wie viel die eine größer sey, als die andere? oder man fragt, wie vielmal die eine größer sey als die andere? Beyde Bestimmungen werden ein Verhältniß genannt, und zwar die erstere ein arithmetisches, die letztere aber ein geometrisches Verhältniß. Diese Benennungen stehen aber mit der Sache selbst in gar keiner Verbindung, sondern sind willkührlich eingeführt worden.

§. 379.

Es versteht sich hier von selbst, daß die Größen von einerley Art seyn müssen, weil sonst nichts über

ihre Gleichheit oder Ungleichheit bestimmt werden kann. Denn es würde ungereimt seyn, wenn einer z. B. fragen wollte, ob 2 ℔ und 3 Ellen einander gleich oder ungleich wären? Daher ist hier jedesmal von Größen einerley Art die Rede, und da sich dieselben immer durch Zahlen anzeigen lassen, so wird, wie schon anfänglich gesagt worden, hier nur von bloßen Zahlen gehandelt.

§. 380.

Wenn also von zwey Zahlen gefragt wird, um wie viel die eine größer sey als die andere, so wird durch die Antwort ihr arithmetisches Verhältniß bestimmt. Da nun dies geschiehet, wenn man den Unterschied zwischen den beyden Zahlen anzeigt, so ist ein arithmetisches Verhältniß nichts anders, als der Unterschied zwischen zwey Zahlen. Dieses letztere Wort (Unterschied) wird aber hier häufiger gebraucht, so daß das Wort Verhältniß nur bey den sogenannten geometrischen Verhältnissen beybehalten wird.

§. 381.

Der Unterschied zwischen zweyen Zahlen wird aber gefunden, wenn man die kleinere von der größern subtrahirt und dadurch erhält man die Antwort auf die Frage, um wie viel die eine größer sey als die andere. Wenn also die beyden Zahlen einander gleich sind, so ist der Unterschied nichts oder Null, und wenn man fragt, um wie viel die eine größer sey als die andere? so muß man antworten, um nichts. Da z. B. 6 = 2. 3, so ist der Unterschied zwischen 6 und 2. 3 nichts.

§. 382.

Sind aber die beyden Zahlen ungleich, als 5 und 3 und man fragt, um wie viel 5 größer sey als 3, so ist

ist die Antwort um 2; welches man findet, wenn man 3 von 5 subtrahiret. Eben so ist 15 um 5 größer als 10, und 20 ist um 8 größer als 12.

§. 383.

Hier ist also dreyerley zu betrachten: erstlich die größere Zahl, zweytens die kleinere, und drittens der Unterschied, welche drey Dinge unter sich eine solche Verbindung haben, daß man immer aus zwey derselben das dritte finden kann. Es sey die größere Zahl = a, die kleinere = b, und der Unterschied, welcher auch die Differenz genannt wird, = d; so wird der Unterschied d gefunden, wenn man b von a subtrahirt, so daß d = a — b; woraus erhellet, wie man d finden soll, wenn a und b gegeben sind.

§. 384.

Wenn aber die kleinere Zahl b, nebst dem Unterschied d gegeben ist, so wird die größere daraus gefunden, wenn man den Unterschied zu der kleinern Zahl addirt; daher bekommt man die größere a = b + d. Denn wenn man von b + d die kleinere b abzieht, so bleibt d übrig, welches der gegebene Unterschied ist. Gesetzt die kleinere Zahl sey 12 und der Unterschied 8, so wird die größere = 20 seyn.

§. 385.

Wenn aber die größere Zahl a nebst dem Unterschied d gegeben ist, so wird die kleinere b gefunden, wenn man den Unterschied von der größern Zahl subtrahirt. Daher bekommt man b = a — d. Denn wenn man diese Zahl a — d von der größern a subtrahirt, so bleibt d übrig, welches der gegebene Unterschied ist.

§. 386.

Diese drey Zahlen a, b, d sind also dergestalt mit einander verbunden, daß man daraus die drey folgen-

den Bestimmungen erhält. Erstens hat man $d = a - b$, 2tens $a = b + d$, und 3tens $b = a - d$, und wenn von diesen drey Vergleichungen eine richtig ist, so sind auch die beyden andern nothwendig richtig. Wenn daher überhaupt $z = x + y$, so ist auch nothwendig $y = z - x$ und $x = z - y$.

§. 387.

Bey einem solchen arithmetischen Verhältniß ist zu merken, daß, wenn zu den beyden Zahlen a und b eine beliebige Zahl c entweder addirt, oder davon subtrahirt wird, der Unterschied eben derselbe bleibet. Also wenn d der Unterschied zwischen a und b ist, so ist auch d der Unterschied zwischen den beyden Zahlen $a + c$ und $b + c$, und auch zwischen $a - c$ und $b - c$. Da z. B. zwischen diesen Zahlen 20 und 12 der Unterschied 8 ist, so bleibt auch dieser Unterschied, wenn man zu denselben Zahlen 20 und 12 eine Zahl nach Belieben entweder addirt oder davon subtrahirt.

§. 388.

Der Beweis hievon ist offenbar. Denn wenn $a - b = d$, so ist auch $(a + c) - (b + c) = d$. Eben so wird auch $(a - c) - (b - c) = d$ seyn.

§. 389.

Wenn die beyden Zahlen a und b verdoppelt werden, so wird auch der Unterschied zweymal so groß. Wenn also $a - b = d$, so wird $2a - 2b = 2d$ seyn; und allgemein wird man $na - nb = nd$ haben, was man auch immer für eine Zahl für n annimmt.

II. Capitel.

Von den arithmetischen Proportionen.

§. 390.

Wenn zwey arithmetische Verhältnisse einander gleich sind, so wird die Gleichheit derselben eine arithmetische Proportion genannt.

Also wenn $a - b = d$ und auch $p - q = d$, so daß der Unterschied zwischen den Zahlen p und q eben so groß ist, als zwischen den Zahlen a und b; so machen diese vier Zahlen eine arithmetische Proportion aus, welche also geschrieben wird $a - b = p - q$, wodurch angezeigt wird, daß der Unterschied zwischen a und b eben so groß sey, als zwischen p und q.

§. 391.

Eine arithmetische Proportion besteht daher aus vier Gliedern, welche so beschaffen seyn müssen, daß, wenn man das zweyte von dem ersten subtrahirt, eben so viel übrig bleibt, als wenn man das vierte von dem dritten abzieht. Also machen diese Zahlen 12, 7, 9, 4, eine arithmetische Proportion aus, weil $12 - 7 = 9 - 4$.

§. 392.

Wenn man eine arithmetische Proportion hat, als $a - b = p - q$, so lassen sich darin das zweyte und dritte Glied verwechseln und es wird auch $a - p = b - q$ seyn. Denn da $a - b = p - q$, so addire man erstlich beyderseits b, und so hat man $a = b + p - q$. Hernach subtrahire man beyderseits p, so bekommt man $a - p = b - q$.

Da also $12 - 7 = 9 - 4$, so ist auch $12 - 9 = 7 - 4$.

§. 393.

In einer jeden arithmetischen Proportion kann man auch das erste Glied mit dem zweyten und zugleich das dritte mit dem vierten verwechseln. Denn wenn $a - b = p - q$, so ist auch $b - a = q - p$. Denn $b - a$ ist das Negative von $a - b$ und eben so ist auch $q - p$ das Negative von $p - q$. Da nun $12 - 7 = 9 - 4$, so ist auch $7 - 12 = 4 - 9$.

§. 394.

Besonders aber ist bey einer jeden arithmetischen Proportion diese Haupteigenschaft wohl zu bemerken, daß die Summe des zweyten und dritten Gliedes immer eben so groß sey, als die Summe des ersten und vierten Gliedes, welchen Satz einige auch so ausdrücken: die Summe der mittlern Glieder ist allezeit so groß, als die Summe der äußern. Also da $12 - 7 = 9 - 4$, so ist $7 + 9 = 12 + 4$, denn jedes macht 16.

§. 395.

Um diese Haupteigenschaft zu beweisen, so sey $a - b = p - q$: man addire beyderseits $b + q$, so bekommt man $a + q = b + p$, das ist, die Summe des ersten und vierten Gliedes ist gleich der Summe des zweyten und dritten. Hieraus erhellt auch umgekehrt folgender Satz: wenn vier Zahlen, als a, b, p, q, so beschaffen sind, daß die Summe der zweyten und dritten so groß ist, als die Summe der ersten und vierten, nemlich daß $b + p = a + q$, so sind diese Zahlen gewiß in einer arithmetischen Proportion, und es wird $a - b = p - q$ seyn. Denn da $a + q = b + p$, so subtrahire man beyderseits $b + q$, und so bekommt man $a - b = p - q$.

Da nun die Zahlen 18, 13, 15, 10, so beschaffen sind, daß die Summe der mittlern $13+15=28=$ der Summe der äußern $18+10$ ist, so sind dieselben auch gewiß in einer arithmetischen Proportion und folglich $18-13=15-10$.

§. 396.

Aus dieser Eigenschaft kann man leicht folgende Frage auflösen: wenn von einer arithmetischen Proportion die drey ersten Glieder gegeben sind, wie soll man daraus das vierte finden? Es seyen die drey ersten Glieder a, b, p und für das vierte, welches gefunden werden soll, schreibe man q, so hat man $a+q=b+p$. Nun subtrahire man beyderseits a, so bekommt man $q=b+p-a$. Also wird das vierte Glied gefunden, wenn man das zweyte und dritte zusammen addirt und von der Summe das erste subtrahirt. Es seyen z. B. 19, 28, 13 die drey ersten Glieder, so ist die Summe des zweyten und dritten $=41$, davon das erste 19 subtrahirt, bleibt 22 für das vierte Glied, und die arithmetische Proportion wird $19-28=13-22$, oder $28-19=22-13$, oder $28-22=19-13$ seyn.

§. 397.

Wenn in einer arithmetischen Proportion das zweyte Glied dem dritten gleich ist, so hat man nur drey Zahlen, welche also beschaffen sind, daß die erste weniger der andern so groß ist, als die andere weniger der dritten, oder daß der Unterschied zwischen der ersten und andern so groß ist, als der Unterschied zwischen der andern und dritten. Solche 3 Zahlen sind 19, 15, 11, weil $19-15=15-11$. Dergleichen Proportionen werden stetige genannt, da

man hingegen diejenigen, wo die mittlern Glieder ungleich sind, wie bey den vorigen Beyspielen, unstetige Proportionen zu nennen pflegt.

§. 398.

Drey solche Zahlen schreiten in einer arithmetischen Progression fort, welche entweder steigt, wenn die zweyte um so viel die erste übersteigt, als die dritte die andere, wie in diesem Exempel 4, 7, 10, oder fällt, wenn die Zahlen um gleich viel kleiner werden als 9, 5, 1.

§. 399.

Es seyn die Zahlen a, b, c in einer arithmetischen Progression, so muß $a - b = b - c$ seyn; hieraus folget, bey der Gleichheit der mittlern und äußern Summe, $2b = a + c$. Nimmt man auf beyden Seiten a weg, so bekommt man $c = 2b - a$.

§. 400.

Wenn also von einer stetigen arithmetischen Proportion die zwey ersten Glieder gegeben sind, als a und b, so wird daraus das dritte gefunden, wenn man das zweyte verdoppelt und davon das erste subtrahirt. Es seyn 1 und drey die zwey ersten Glieder einer stetigen arithmetischen Proportion, so wird das dritte $= 2.3 - 1 = 5$ seyn, und aus den Zahlen 1, 3, 5 hat man diese Proportion $1 - 3 = 3 - 5$.

Zusatz. Da nach §. 399. in einer stetigen arithmetischen Proportion $2b = a + c$ ist, so findet man $b = \frac{a+c}{2}$, das heißt, die mittlere arithmetische Proportionalzahl, wird gefunden, wenn man die Summe aus dem ersten und letzten Gliede halbirt. Z. B. es sey 8 das erste und 14 das letzte Glied, so ist das mittlere $= \frac{8+14}{2} = 4 + 7 = 11$, und wirklich ist $8 - 11 = 11 - 14$.

§. 401.

§. 401.

Man kann nach der Regel des vorhergehenden §. weiter fortschreiten, und wie man aus dem ersten und zweyten Gliede das dritte gefunden hat, so kann man aus dem zweyten und dritten das vierte u. s. f. finden, und solchergestalt die arithmetische Progression fortsetzen so weit man will. Es sey a das erste Glied und b das zweyte, so wird das dritte $= 2b - a$; das vierte $= 4b - 2a - b = 3b - 2a$; das fünfte $6b - 4a - 2b + a = 4b - 3a$; das sechste $= 8b - 6a - 3b + 2a = 5b - 4a$; das siebente $= 10b - 8a - 4b + 3a = 6b - 5a$ u. s. f. das nte $= (n-1)b - (n-2)a$.

III. Capitel.

Von den arithmetischen Progressionen.

§. 402.

Eine Reihe Zahlen, welche immer um gleich viel wachsen oder abnehmen, aus so viel Gliedern dieselbe auch immer bestehen mag, wird eine **arithmetische Progression** genannt.

Also machen die natürlichen Zahlen der Ordnung nach geschrieben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 u. s. f. eine arithmetische Progression, weil dieselben immer um eins steigen und diese Reihe, als 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1 u. s. f. ist auch eine arithmetische Progression, weil diese Zahlen immer um 3 abnehmen.

§. 403.

Die Zahl, um welche die Glieder einer arithmetischen Progression größer oder kleiner werden, wird

die Differenz oder der Unterschied genannt. Wenn also das erste Glied nebst der Differenz gegeben ist, so kann man die arithmetische Progression so weit man will fortsetzen. Es sey z. B. das erste Glied = 2 und die Differenz = 3, so wird die steigende Progression seyn:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 u. s. f.

wo ein jedes Glied gefunden wird, wenn man zu dem vorhergehenden die Differenz addirt.

§. 404.

Man pflegt über die Glieder einer solchen arithmetischen Progression die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 u. s. f. zu schreiben, damit man sogleich sehen könne, das wie vielste Glied ein jegliches sey, und die so darüber geschriebene Zahlen werden Zeiger oder Indices genannt. Das obige Exempel kommt daher also zu stehen:

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10	
arith. Prog.	2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29	u. s. f.

woraus man sieht, daß 29 das zehnte Glied ist.

§. 405.

Es sey a das erste Glied und d die Differenz, so wird die arithmetische Progression folgende seyn:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	
a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$,	$a+5d$,	$a+6d$,	$a+7d$	u. s. f.

Hieraus kann man sogleich ein jedes Glied finden, ohne daß man erst alle vorhergehende zu wissen braucht, und dieses allein aus dem ersten Gliede a und der Differenz d. Also wird z. B. das 10te Glied seyn $= a + 9d$, das 100te $= a + 99d$, und auf eine allgemeine Art wird das nte Glied seyn: $a + (n - 1)d$.

§. 406.

Wenn die arithmetische Progression irgendwo abgebrochen wird, so muß man vorzüglich das erste

und

und das letzte Glied merken, und der Zeiger des letzten wird die Anzahl der Glieder anzeigen. Wenn also das erste Glied = a, die Differenz = d und die Anzahl der Glieder = n, so ist das letzte Glied = a + (n — 1) d. Dies wird also gefunden, wenn man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt, und dazu das erste Glied addirt. Man habe z. B. eine arithmetische Progression von 100 Gliedern, wovon das erste = 4 und die Differenz = 3, so wird das letzte Glied 99. 3 + 4 = 301 seyn.

§. 407.

Hat man das erste Glied = a und das letzte = z, nebst der Anzahl der Glieder = n, so kann man daraus die Differenz = d finden. Denn da das letzte Glied z = a + (n — 1) d ist, so hat man, wenn man auf beiden Seiten subtrahirt, z — a = (n — 1) d. Wenn man also von dem letzten Gliede das erste subtrahirt, so hat man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt; oder z — a ist das Product von (n — 1) in d. Man darf also nur z — a durch n — 1 dividiren, so bekommt man die Differenz $d = \frac{z-a}{n-1}$, woraus sich diese Regel ergiebt: man subtrahirt vom letzten Gliede das erste, den Rest theilt man durch die Anzahl der Glieder weniger eins, so bekommt man die Differenz; woraus man hernach die ganze Progression bestimmen kann.

§. 408.

Es hat z. B. einer eine arithmetische Progression von 9 Gliedern, wovon das erste Glied 2 und das letzte 26 ist, und von welcher die Differenz gesucht

sucht werden soll. Man muß also das erste Glied 2 von dem letzten 26 subtrahiren und den Rest 24 durch 9 — 1, das ist durch 8 dividiren, so bekommt man die Differenz = 3, und die Progression selbst wird seyn:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9. \\ 2, & 5, & 8, & 11, & 14, & 17, & 20, & 23, & 26. \end{array}$$

Um ein anderes Beispiel zu geben, so sey das erste Glied 1, das letzte 2, und die Anzahl der Glieder 10, wovon die arithmetische Progression verlangt wird. Hier bekommt man zur Differenz $\frac{2-1}{10-1} = \frac{1}{9}$, und die verlangte Progression wird seyn:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10. \\ 1, & 1\frac{1}{9}, & 1\frac{2}{9}, & 1\frac{3}{9}, & 1\frac{4}{9}, & 1\frac{5}{9}, & 1\frac{6}{9}, & 1\frac{7}{9}, & 1\frac{8}{9}, & 2. \end{array}$$

Noch ein Beispiel. Es sey das erste Glied $2\frac{1}{3}$, das letzte $12\frac{1}{2}$ und die Anzahl der Glieder 7. Hieraus erhält man die Differenz $\frac{12\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}{7-1} = \frac{10\frac{1}{6}}{6} = \frac{61}{36} = 1\frac{25}{36}$, folglich wird die Progression seyn:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7. \\ 2\frac{1}{3}, & 4\frac{1}{36}, & 5\frac{13}{18}, & 7\frac{5}{12}, & 9\frac{1}{9}, & 10\frac{29}{36}, & 12\frac{1}{2}. \end{array}$$

§. 409.

Wenn ferner das erste Glied a und das letzte z, mit der Differenz d gegeben ist, so kann man daraus die Anzahl der Glieder n finden. Denn da $z - a = (n - 1)d$, so dividire man beyderseits mit d und da bekommt man $\frac{z-a}{d} = n - 1$. Da nun n um eins größer ist als $n - 1$, so wird $n = \frac{z-a}{d} + 1$, folglich findet man die Anzahl der Glieder, wenn man den Unterschied zwischen dem ersten und letzten Gliede $z - a$ durch die Differenz dividirt und zum Quotienten $\frac{z-a}{d}$ noch eins addirt.

Es

Es sey z. B. das erste Glied = 4, das letzte = 100, und die Differenz = 12, so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{100-4}{12}+1=9$, und diese neun Glieder sind folgende:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
4, 16, 28, 40, 52, 64, 76, 88, 100.

Es sey das erste Glied = 2, das letzte = 6, und die Differenz = $1\frac{1}{3}$, so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{4}{1\frac{1}{3}}+1=4$, und diese vier Glieder sind:

1, 2, 3, 4.
2, $3\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{3}$, 6.

Es sey ferner das erste Glied = $3\frac{1}{3}$, das letzte $7\frac{2}{3}$, und die Differenz = $1\frac{4}{9}$, so wird die Anzahl der Glieder = $\frac{7\frac{2}{3}-3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}}+1=4$, und diese vier Glieder sind:

1, 2, 3, 4.
$3\frac{1}{3}$, $4\frac{7}{9}$, $6\frac{2}{9}$, $7\frac{2}{3}$.

§. 410.

Es ist aber hier wohl zu merken, daß die Anzahl der Glieder nothwendig eine ganze Zahl seyn muß. Wenn man also in obigem Beispiele für n einen Bruch gefunden hätte, so wäre die Frage ungereimt gewesen.

Wenn folglich für $\frac{z-a}{d}$ keine ganze Zahl gefunden würde, so ließe sich diese Frage nicht auflösen, und man müßte antworten, daß die Frage unmöglich wäre. Daher muß sich bey dergleichen Fragen die Zahl $z-a$ durch d theilen lassen.

1. Zusatz. Soll endlich, wenn von einer arithmetischen Progression das letzte Glied z, die Differenz d, und die Anzahl der Glieder n gegeben wird, das erste Glied a gefunden werden, so ist da $a+(n-1)d=z$, auch $a=z-(n-1)d$, d. h. man findet das erste Glied a, wenn man das Product aus der Differenz d in die Zahl der

Glieder

Glieder n weniger 1 von dem letzten Gliede abzieht. Es sey z. B. das letzte Glied $z = 100$, die Anzahl der Glieder $n = 9$, und die Differenz $d = 12$, so wird das erste Glied $a = 100 - (9 - 1) 12 = 100 - 8 \cdot 12 = 4$ seyn, und dieses war auch in der ersten Progression §. 409 wirklich das erste Glied.

2. Zusatz. Was bisher von den steigenden arithmetischen Progressionen gesagt worden ist, läßt sich auch auf die fallenden anwenden, wenn man bey diesen das letzte Glied, wie das erste, und das erste, wie das letzte Glied einer steigenden Progression behandelt.

§. 411.

Bey einer jeden arithmetischen Progression sind also folgende vier Stücke zu betrachten:

I. das erste Glied a, II. das letzte Glied z,
III. die Differenz d, IV. die Anzahl der Glieder n,

welche so beschaffen sind, daß, wenn drey derselben bekannt sind, das vierte daraus bestimmt werden kann, als:

I. Wenn a, d und n bekannt sind, so hat man $z = a + (n - 1) d$.

II. Wenn z, d und n bekannt sind, so hat man $a = z - (n - 1) d$.

III. Wenn a, z und n bekannt sind, so hat man $d = \frac{z - a}{n - 1}$.

IV. Wenn a, z und d bekannt sind, so hat man $n = \frac{z - a}{d} + 1$.

Zusatz. Für fallende Reihen ist a das letzte und z das erste Glied und die Differenz $= - d$, daher für solche Reihen $z = a - (n - 1) d$ und $a = z + (n - 1) d$, und $d = \frac{a - z}{n - 1}$ und $n = \frac{a - z}{d} + 1$. Daß bey fallenden Reihen die Differenz d negativ ist, entsteht bloß aus der Art, wie ein Glied aus dem vorhergehenden gemacht wird, in Vergleichung der Entstehung des eben so vielten Gliedes in einer steigenden Reihe von eben der Differenz. Bey dieser wird nemlich die Differenz zu dem vorhergehenden Gliede addirt, da hingegen bey jener Reihe solche abgezogen werden muß. Will man nun das Wort addiren beybehalten,

ten, so muß man die Differenz bey fallenden Reihen negativ setzen, denn eine negative Größe addiren, oder eine positive subtrahiren, giebt einerley Resultate. Daß d negativ wird, liegt also gar nicht in dem Begriff von Differenz, sondern in der Art, wie die Glieder der Progression gebildet werden sollen.

IV. Capitel.

Von der Summirung der arithmetischen Progressionen.

§. 412.

Wenn eine arithmetische Progression vorgelegt ist, so pflegt man auch die Summe derselben zu suchen. Diese findet man, wenn man alle Glieder zusammen addirt. Da nun diese Addition sehr weitläuftig seyn würde, wenn die Progression aus sehr viel Gliedern besteht, so kann eine Regel gegeben werden, mit deren Hülfe diese Summe ganz leicht gefunden wird.

§. 413.

Wir wollen erstlich eine solche bestimmte Progression betrachten, wo das erste Glied = 2, die Differenz = 3, das letzte Glied = 29, und die Anzahl der Glieder = 10 ist.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.

Hier ist nun die Summe des ersten und letzten Gliedes = 31, die Summe des zweyten und vorletzten Gliedes = 31, die Summe des dritten und dritten vom Ende = 31, die Summe des vierten und vierten vom Ende = 31 u. s. f., woraus man ersieht, daß immer zwey Glieder, die von dem ersten und letzten gleich weit entfernt sind, zusammen genommen, eben so viel ausmachen, als das erste und letzte zusammen.

§. 414.

§. 414.

Der Grund davon fällt auch so gleich in die Augen. Denn wenn das erste Glied = a gesetzt, das letzte = z, die Differenz aber = d wird, so ist die Summe des ersten und letzten = a + z. Hernach ist das zweyte Glied a + d und das vorletzte = z — d, welche zusammen genommen a + z ausmachen. Ferner ist das dritte Glied a + 2d und das dritte vom Ende = z — 2d, welche zusammen auch a + z betragen. Woraus die Wahrheit des obigen Satzes erhellet.

§. 415.

Um nun die Summe der obigen Progression zu finden, nemlich von 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29, so schreibe man eben diese Progression rückwärts darunter und addire Glied für Glied, wie folget:

$$\begin{array}{l} 2+5+8+11+14+17+20+23+26+29 \\ 29+26+23+20+17+14+11+8+5+2 \\ \hline 31+31+31+31+31+31+31+31+31+31 \end{array}$$

Diese gefundene und aus lauter gleichen Gliedern bestehende Reihe ist offenbar zweymal so groß als die Summe der gegebenen Progression. Die Anzahl dieser gleichen Glieder ist 10, eben wie in der Progression, und also ist derselben Summe = 10. 31 = 310. Da nun diese Summe zweymal so groß ist, als die Summe der arithmetischen Progression, so wird die wahre Summe = 155 seyn.

§. 416.

Wenn man auf diese Art mit einer jeden arithmetischen Progression verfährt, wovon das erste Glied = a, das letzte = z, und die Anzahl der Glieder = n ist, indem man eben dieselbe Progression rück-

wärts

wärts darunter schreibt und Glied vor Glied addirt, so bekommt man für jedes Glied $a+z$, deren Anzahl $= n$, folglich ist die Summe derselben $= n(a+z)$, welche zweymal so groß ist, als die Summe der Progression, daher ist die Summe der arithmetischen Progression selbst $= \frac{n(a+z)}{2}$.

§. 417.

Hieraus ergiebt sich nun folgende einfache Regel, um die Summe einer jeden arithmetischen Progression zu finden:

Man multiplicire die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl der Glieder, so wird die Hälfte dieses Products die Summe der ganzen Progression anzeigen.

Oder welches dasselbe ist: man multiplicire die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder.

Oder auch: man multiplicire die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes mit der ganzen Anzahl der Glieder, so bekommt man die Summe der ganzen Progression.

§. 418.

Es ist nöthig, diese Regel mit einigen Beispielen zu erläutern. Es sey daher die Progression der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, bis 100 gegeben, von welchen die Summe gesucht werden soll. Diese wird nach der ersten Regel seyn $\frac{100.101}{2} = 50.101 = 5050$.

Es wird ferner gefragt, wie viel Schläge eine Schlag-Uhr in 12 Stunden thue? Zu diesem Ende müssen die Zahlen 1, 2, 3 bis 12, zusammen addirt werden, die Summe wird also seyn $\frac{12.13}{2} = 6.13 = 78$.

Wollte man die Summe von eben dieser Reihe bis 1000 fortgesetzt wissen, so würde dieselbe seyn 500500; bis 10000 fortgesetzt, wird dieselbe = 50005000 seyn.

§. 419.

Frage. Einer kauft ein Pferd mit dieser Bedingung: für den ersten Hufnagel zahlt er 5 Groschen, für den zweyten 8, für den dritten 11, und immer 3 Groschen mehr für einen jeden folgenden. Es sind aber in allem 32 Nägel, wie viel kostet ihm das Pferd?

Hier wird also die Summe von einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied 5, die Differenz = 3, und die Anzahl der Glieder = 32 ist, gesucht.

Hier muß nun zuerst das letzte Glied gesucht werden, welches nach obiger Regel (§. 406) gefunden wird $= 5 + 31 . 3 = 98$, und hieraus ergiebt sich die gesuchte Summe $\frac{103 . 32}{2} = 103 . 16 = 1648$; also kostet das Pferd 1648 Groschen, oder 68 Rthl. 16 Gr.

§. 420.

Es sey auf eine allgemeine Art das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$, und die Anzahl der Glieder $= n$, woraus die Summe der ganzen Progression gefunden werden soll; da nun das letzte Glied $z = a + (n - 1) d$ seyn muß, so ist die Summe des ersten und letzten Gliedes $= 2a + (n - 1) d$, welche mit der Anzahl der Glieder n multiplicirt, $2na + n (n - 1) d$ giebt, daher die gesuchte Summe seyn wird $= na + \frac{n (n - 1)}{2} d$.

Nach dieser Formel, weil in dem obigen Beispiel $a = 5$, $d = 3$, und $n = 32$ war, so erhält man die Summe $5 . 32 + \frac{31 . 32 . 3}{2} = 160 + 1488 = 1648$ wie vorher.

§. 421.

§. 421.

Wenn die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3 u. s. f. bis n zusammen addirt werden soll, so hat man, um diese Summe zu finden, das erste Glied = 1, das letzte = n und die Anzahl der Glieder, woraus die Summe gefunden wird $\frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Setzt man n = 1766, so wird die Summe aller Zahlen von 1 bis 1766 seyn = 883. 1767 = 1560261.

§. 422.

Es sey die Progreßion der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 u. s. f. gegeben, welche bis auf n Glieder fortgesetzt ist, wovon die Summe verlangt wird.

Hier ist nun das erste Glied = 1, die Differenz = 2, die Anzahl der Glieder = n; daraus wird das letzte Glied $1 + (n - 1)2 = 2n - 1$ seyn; woraus man die gesuchte Summe = n^2 erhält.

Folglich darf man nur die Anzahl der Glieder mit sich selbst multipliciren. Man mag also von dieser Progreßion so viel Glieder zusammen addiren als man will, so ist die Summe immer ein Quadrat, nemlich das Quadrat der Anzahl der Glieder, wie es auch folgende Beispiele bestätigen.

Glied.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10 u.s.f.
Prog.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19 u.s.f.
Sum.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100 u.s.f.

§. 423.

Es sey ferner das erste Glied = 1, die Differenz = 3 und die Anzahl der Glieder = n, so hat man diese Progreßion 1, 4, 7, 10 u. s. f., wovon das letzte Glied $1 + (n - 1)3 = 3n - 2$ seyn wird; daher die Summe des ersten und letzten Gliedes = $3n - 1$;

folglich die Summe der Progression $\frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3nn-n}{2}$.
Nimmt man n=20, so ist die Summe = 10. 59=590.

§. 424.

Es sey das erste Glied = 1, die Differenz = d, und die Anzahl der Glieder = n, so wird das letzte Glied $1+(n-1)d$ seyn. Hierzu das erste addirt, giebt $2+(n-1)d$, dies mit der Anzahl der Glieder multiplicirt, $2n+n(n-1)d$, daher die Summe der Progression $n+\frac{n(n-1)d}{2}$ seyn wird.

Wir wollen hier folgendes Täfelchen anhängen, worin der Buchstabe S die Summe der Progression anzeigt, und das erste Glied immer 1 ist,

wenn $d=1$, so ist $S=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{nn+n}{2}$
$d=2$ — $S=n+\frac{2n(n-1)}{2}=nn$
$d=3$ — $S=n+\frac{3n(n-1)}{2}=\frac{3nn-n}{2}$
$d=4$ — $S=n+\frac{4n(n-1)}{2}=2nn-n$
$d=5$ — $S=n+\frac{5n(n-1)}{2}=\frac{5nn-3n}{2}$
$d=6$ — $S=n+\frac{6n(n-1)}{2}=3nn-2n$
$d=7$ — $S=n+\frac{7n(n-1)}{2}=\frac{7nn-5n}{2}$
$d=8$ — $S=n+\frac{8n(n-1)}{2}=4nn-3n$
$d=9$ — $S=n+\frac{9n(n-1)}{2}=\frac{9nn-7n}{2}$
$d=10$ — $S=n+\frac{10n(n-1)}{2}=5nn-4n$

u. s. f.

so daß, wenn $d=n$, $S=n+\frac{n^2(n-1)}{2}$ ist.

V. Capitel.

Von den polygonal oder vieleckigen Zahlen.

§. 425.

Die Summation der arithmetischen Progressionen, welche von 1 anfangen und deren Differenz entweder 1, 2, 3, oder eine andere beliebige ganze Zahl ist, leitet uns auf die Lehre von den polygonal oder vieleckigen Zahlen, welche entstehen, wenn man einige Glieder von solchen Progressionen zusammen addirt.

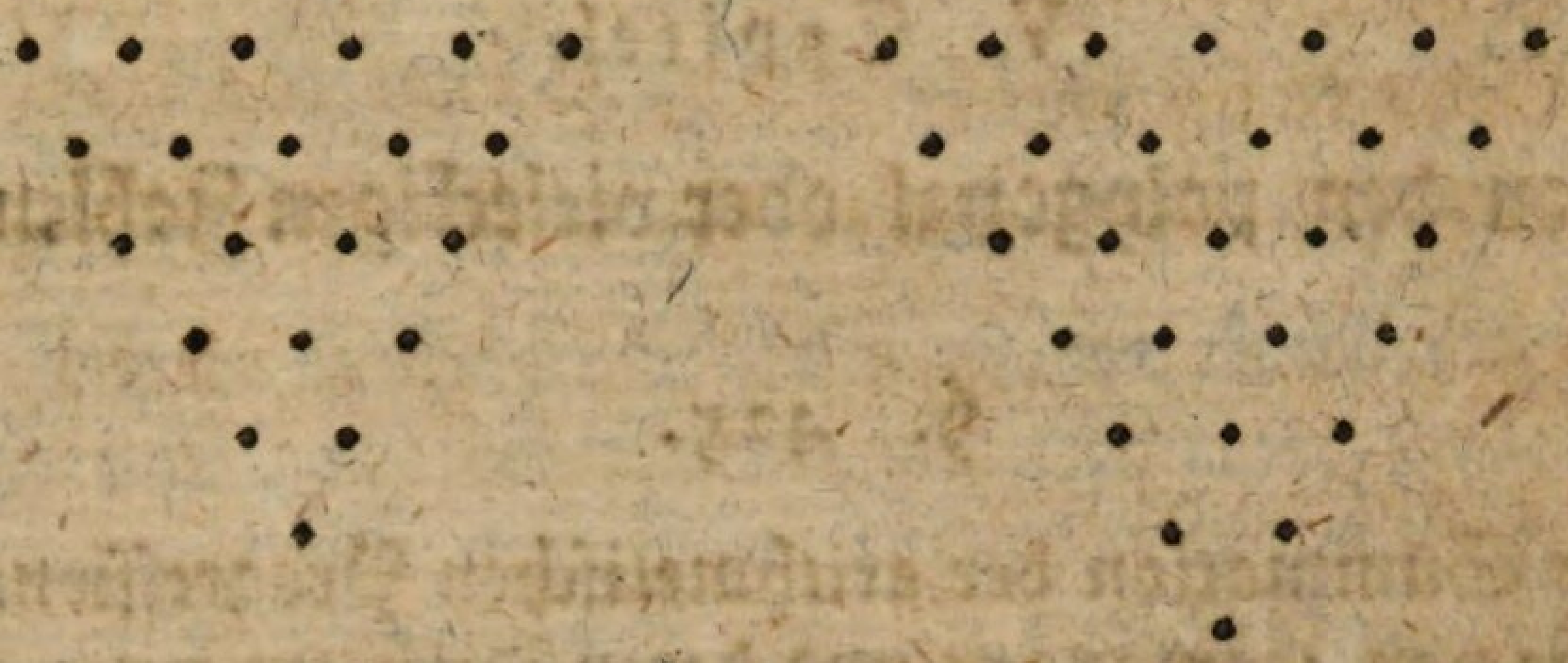
§. 426.

Setzt man die Differenz = 1, indem das erste Glied beständig 1 ist, so entsteht diese arithmetische Progression = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 u. s. f. Nimmt man nun außer dem ersten Gliede die Summe von zwey, drey, vier Gliedern u. s. f., so entsteht daraus diese Reihe von Zahlen:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 u. s. f. so daß $1 = 1$, $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ u. s. f. Diese Zahlen werden triangular (triagonal) oder dreyeckige Zahlen genannt, weil sich so viel Punkte, als eine solche Zahl anzeigt, durch ein Dreyeck vorstellen lassen, wie aus folgendem zu ersehen:

1. 3. 6. 10. 15.

21. 28.

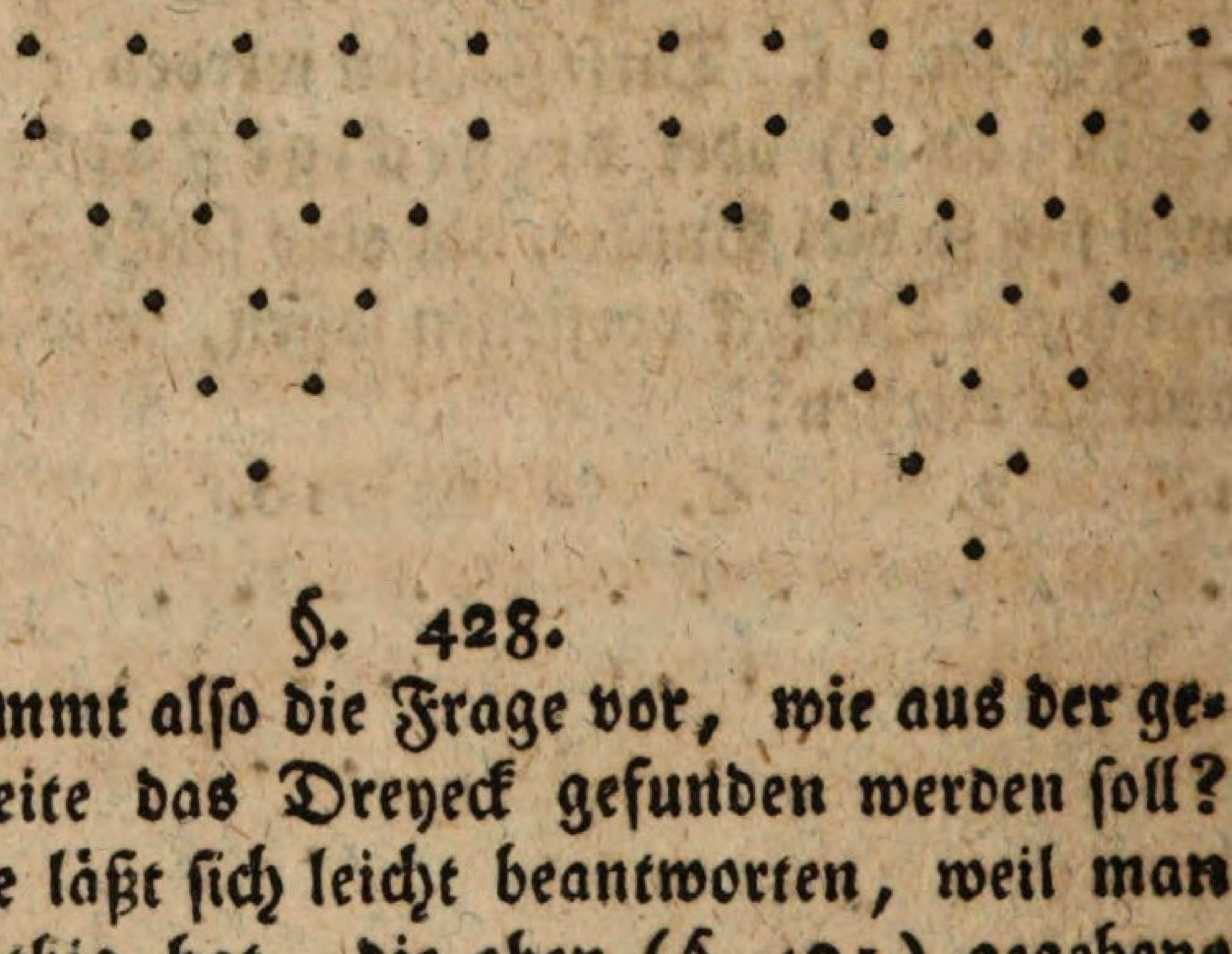


§. 427.

Bey einem jeden dieser Dreyecke sieht man vorzüglich darauf, wie viel Punkte in einer jeden Seite sind; bey dem ersten ist nur eins, bey dem zweyten 2, bey dem dritten 3, bey dem vierten 4, u. s. f. Also nach der Anzahl der Punkte in einer Seite, welche schlechthin die Seite genannt wird, verhalten sich die dreyeckigen Zahlen, oder die Anzahl aller Punkte, welche schlechthin ein Dreyeck genannt wird, folgendergestalt:

Seite
Dreyeck

Seite
Dreyeck



§. 428.

Hier kommt also die Frage vor, wie aus der gegebenen Seite das Dreyeck gefunden werden soll? Diese Frage läßt sich leicht beantworten, weil man hier nur nöthig hat, die oben (§. 421) gegebene

Regel

Regel von der Summirung der natürlichen Zahlen anzuwenden.

Denn es sey die Seite = n, so wird das Dreyeck $1+2+3+4+ \ldots n$, deren Summe = $\frac{nn+n}{2}$, folglich wird das Dreyeck $\frac{nn+n}{2}$. Ist also n = 1, so wird das Dreyeck = 1.

Ist n = 2, so ist das Dreyeck $\frac{4+2}{2} = 3$.

n = 3 — — $\frac{9+3}{2} = 6$.

n = 4 — — $\frac{16+4}{2} = 10$ u. s. f.

Nimmt man n = 100, so wird das Dreyeck = 5050 u. s. f.

Anmerk. Herr v. Jaucourt hat 1762 zu Haag eine Tafel der Triagonalzahlen herausgegeben, welche für n = 1, 2, 3 - - - bis incl. 20000 berechnet ist. Diese Tafeln können sehr nützlich seyn, eine große Menge arithmetischer Operationen zu erleichtern, wie es der Herausgeber in einer sehr weitläuftigen Einleitung zeigt.

§. 429.

Diese Formel $\frac{n^2+n}{2}$ wird nun die Generalformel für alle dreyeckige Zahlen genannt: weil sich aus derselben für eine jede Seite, die durch n angedeutet wird, die dreyeckige Zahl finden läßt.

Dieselbe Formel kann auch also vorgestellet werden $\frac{n(n+1)}{2}$, welches zur Erleichterung der Rechnung dienet, weil allezeit entweder n oder n + 1 eine gerade Zahl ist und sich durch 2 theilen läßt.

Also wenn n = 12, so ist das Dreyeck = $\frac{12.13}{2}$ = 6.13 = 78. Ist n = 15, so ist das Dreyeck = $\frac{15.16.}{2}$ = 15.8 = 120 u. s. f.

§. 430.

Setzt man die Differenz = 2, so hat man diese arithmetische Progression:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 u. s. f.

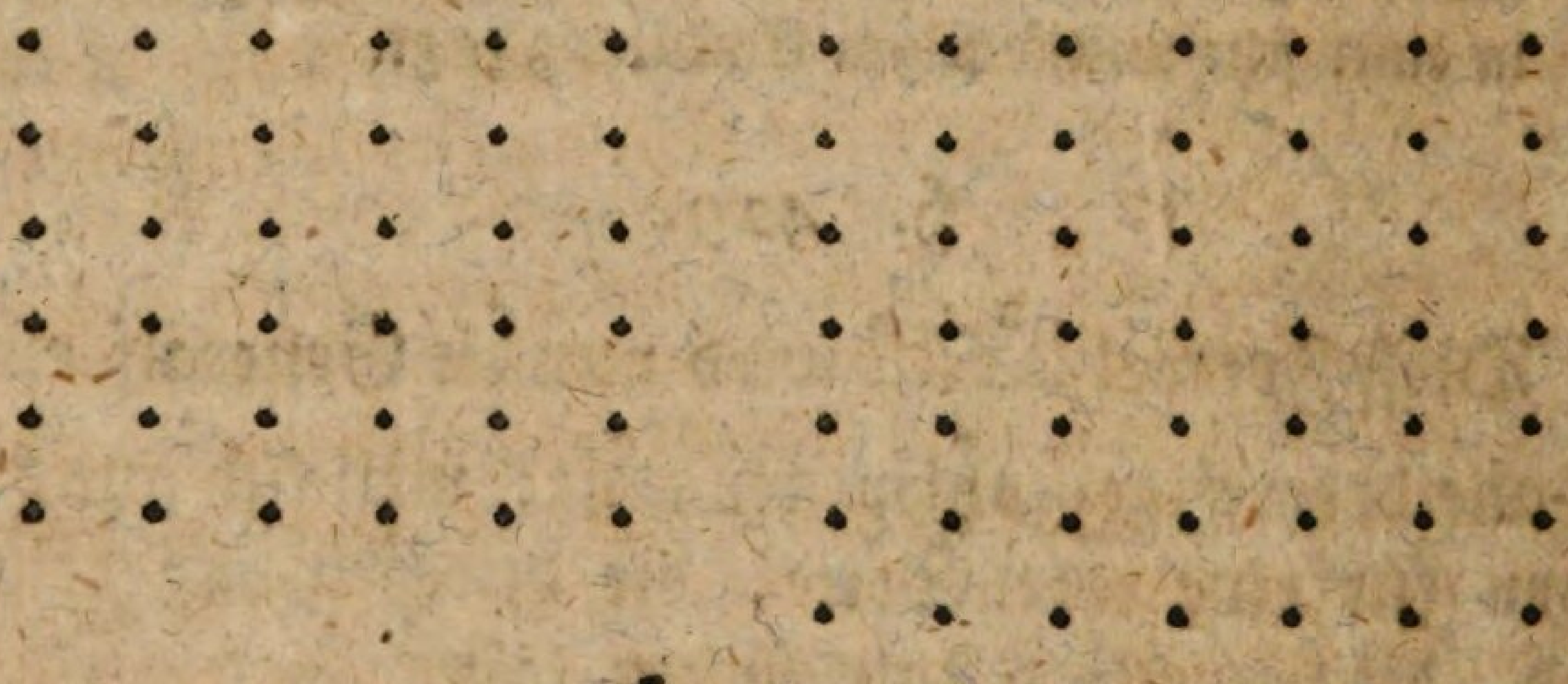
wovon die Summen folgende Reihe ausmachen:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 u. s. f.

Diese Zahlen werden quadrangular (tetragonal) oder viereckige Zahlen genannt, und sind eben diejenigen, welche oben (§. 115) Quadrate genannt worden. Es lassen sich nemlich so viel Punkte, als eine solche Zahl anzeigt, in ein Viereck bringen:

1, 4, 9, 16, 25,

36, 49,



§. 431.

Hier sieht man, daß die Seite eines solchen Vierecks eben so viel Punkte enthält, als die Quadratwurzel davon anzeigt. Also ist von der Seite 5 das Viereck 25, und von der Seite 6 das Viereck 36; überhaupt aber, wenn die Seite n ist, wodurch die Anzahl der Glieder dieser Progression 1, 3, 5, 7 u. s. f. bis n angedeutet wird, so ist das Viereck die Summe derselben Glieder, welche oben (§. 422)

$= n^2$

$= n^2$ gefunden worden. Von diesem Viereck oder Quadrat aber ist schon oben (§. 115 u. f.) ausführlich gehandelt worden.

§. 432.

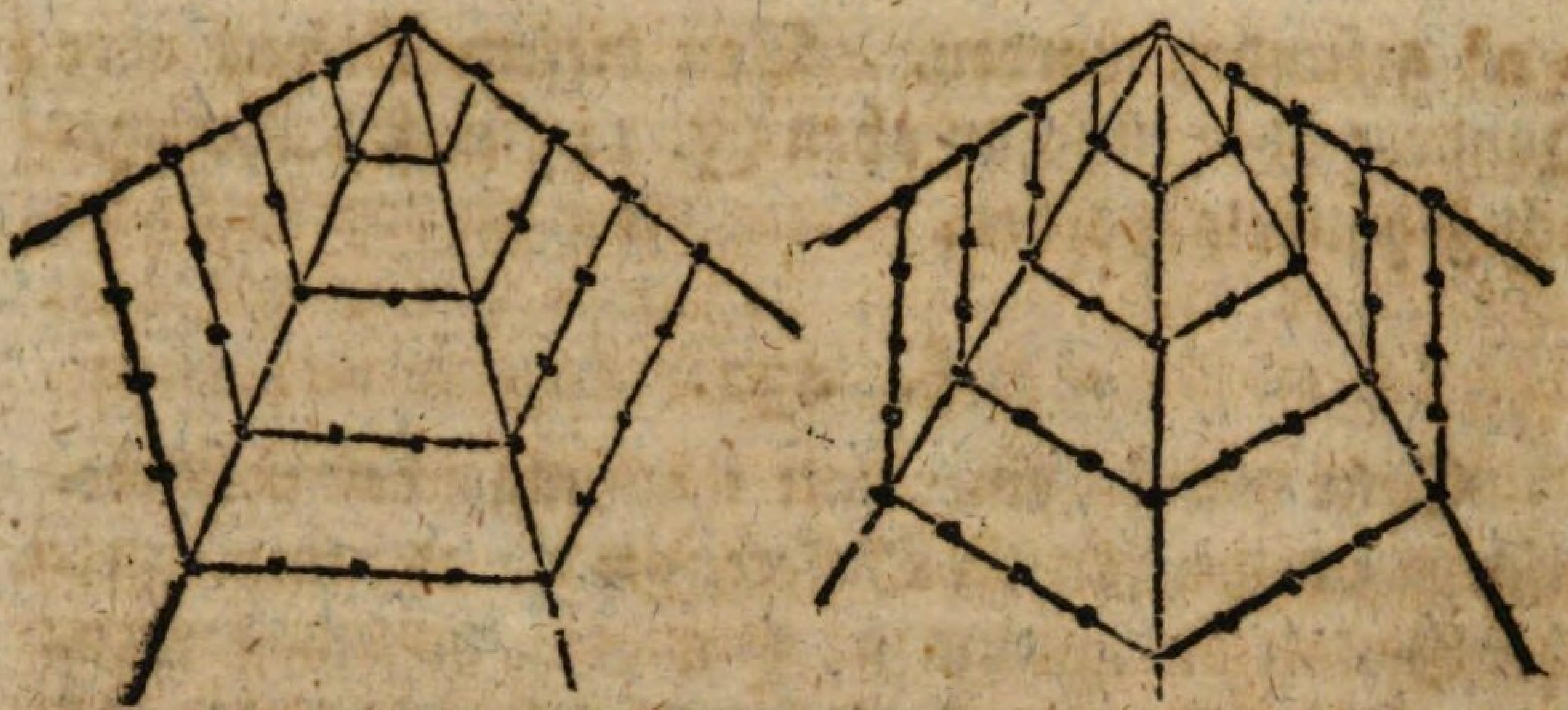
Setzt man in einer mit 1 anfangenden arithmetischen Progression die Differenz = 3 und nimmt gleicher Gestalt die Summen, so werden dieselben pentagonal oder fünfeckige Zahlen genannt, ob sich dieselben gleich nicht mehr so gut durch Punkte vorstellen lassen. Dieselben schreiten demnach folgendermaßen fort.

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11
arith. Prog.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25,	28,	31
Fünfeck	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92,	117,	145,	176

u. s. f. und der Zeiger weiset die Seite eines jeden Fünfecks an.

Zusatz. Folgende Regel wird die wirkliche Construction der Polygonalzahlen sehr erleichtern: man zeichne anfangs ein kleines reguläres Polygon von so viel Seiten, als verlangt werden. Die Zahl der Seiten bleibt für eine und eben dieselbe Reihe von Polygonalzahlen, und ist gleich der um 2 vermehrten Differenz derjenigen arithmetischen Reihe, woraus jene Reihe entstanden ist. Nun wähle man einen Winkel dieses Polygons, um von ihm aus durch alle Winkelpunkte unbestimmte Linien zu ziehen, wovon aus geometrischen Gründen immer 3 weniger als das Polygon Seiten hat, Diagonalen sind. Auf eine der verlängerten Seiten des kleinen Polygons trage man alsdann die Seite dieses Polygons so oft, als man will. Durch diese solchergestalt erhaltenen Punkte ziehe man mit den Seiten des kleinen Polygons Parallelen; diese Parallelen theile man endlich in eben so viele gleiche Theile, als die zu ihnen gehörigen Diagonalen haben, so hat man die verlangte Construction.

Diese Regel ist ganz allgemein und gilt vom Triangel an bis zum Polygon von unendlich vielen Seiten. Folgende zwey Figuren werden diese Regel hinlänglich erläutern:



Die Theilung dieser Figuren in Dreyecke bietet noch viele merkwürdige Betrachtungen und artige Verwandlungen der allgemeinen Formel dar, durch welche man, wie in diesem Capitel gelehrt worden, die Polygonalzahlen ausdrückt; allein hier dürfen wir uns nicht dabey aufhalten.

§. 433.

Wenn also die Seite n gesetzt wird, so läßt sich jede fünfeckige Zahl durch die oben (§. 423) erklärte Formel $\frac{3nn-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$ ausdrücken. Wenn z. B. n = 7, so ist das Fünfeck $\left(\frac{3.7-1}{2}\right) 7 = 70$. Will man die fünfeckige Zahl von der Seite 100 wissen, so setzt man n = 100 und bekommt 14950.

§. 434.

Setzt man die Differenz = 4, so erhält man auf diese Art die hexagonal oder sechseckigen Zahlen, welche in folgender Ordnung fortschreiten:

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
arith. Prog.	1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	29,	33,	37.
Sechseck	1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	120,	153,	190.

Hier giebt der Zeiger wieder die Seite eines jeden Sechsecks an.

§. 435.

Wenn also die Seite n ist, so wird die sechseckige Zahl nach der (in §. 424) gegebenen Formel = 2nn — n = n (2n — 1), wobey zu merken ist, daß alle diese sechseckigen Zahlen zugleich dreyeckige Zahlen sind. Denn wenn man in diesen immer eine überspringt, so erhält man die sechseckige.

§. 436.

§. 436.

Auf gleiche Weise findet man die siebeneckigen, achteckigen, neuneckigen Zahlen u. s. f., von welchen wir die Generalformeln hier insgesammt hersetzen wollen. Wenn also die Seite n ist, so wird seyn

das Dreyeck $= \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Viereck $= \frac{2n^2+0n}{2} = n^2$

V eck $= \frac{3n^2-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$

VI eck $= \frac{4n^2-2n}{2} = 2n^2-n = n(2n-1)$

VII eck $= \frac{5n^2-3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2}$

VIII eck $= \frac{6n^2-4n}{2} = 3n^2-2n = n(3n-2)$

IX. eck $= \frac{7n^2-5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2}$

X eck $= \frac{8n^2-6n}{2} = 4n^2-3n = n(4n-3)$

XI eck $= \frac{9n^2-7n}{2} = \frac{n(9n-7)}{2}$

XII eck $= \frac{10n^2-8n}{2} = 5n^2-4n = n(5n-4)$

XX eck $= \frac{18n^2-16n}{2} = 9n^2-8n = n(9n-8)$

XXV eck $= \frac{23n^2-21n}{2} = \frac{n(23n-21)}{2}$

m eck $= \frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}$

Man wird leicht einsehen, daß diese Tafel nur eine erweiterte von §. 424. ist.

§. 437.

Wenn also die Seite n ist, so hat man auf eine allgemeine Art die m eckige Zahl $= \frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}$ woraus man alle nur mögliche vieleckige Zahlen finden kann, deren Seite = n. Wollte man daraus

die

die zweyeckigen Zahlen finden, so würde m = 2 und dieselbe = n seyn.

Setzt man m = 3, so wird die III eckige Zahl = $\frac{nn+n}{2}$

Setzt man m = 4, so wird die IV eckige Zahl = nn u.s.f.

Zusatz. Die allgemeine Formel $\frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}$ ist hier nach einem bey den besondern Formeln bemerkten Gesetz gefunden worden. Man findet solche aber unmittelbar durch folgende Schlüsse:

Der Buchstabe m sey die Zahl der Winkel, wovon das Vieleck benannt wird, so ist die Differenz der arithmetischen Reihe, aus welcher die gesuchte Polygonalzahl entsteht, = m — 2, und n sey die Anzahl der Glieder dieser Reihe.

Da nun in jeder arithmetischen Reihe das letzte Glied $z = a+(n-1)d$ und $S = (a+z)\frac{n}{2}$, so ist in unserer obigen Reihe $a = 1$; $d = m-2$; $z = 1+(n-1)(m-2)$, also die Summe des ersten und letzten Gliedes $= 2+(n-1)(m-2)$, und diese Summe mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt, giebt $\frac{(2+(n-1)m-2))n}{2} = \frac{(m-2)(n-1)n+2n}{2} =$

$$\frac{(m-2)(n^2-n)+2n}{2} = \frac{(m-2)n^2-(m-2)n+2n}{2} = \frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}$$

Die zweyeckigen Zahlen zu finden, muß man m = 2 setzen, dieses giebt also $\frac{(2-2)n^2-(2-4)n}{2} = n$. Die arithmetische Progression, woraus diese zweyeckige Zahlen entstehen, wäre, da die Differenz m — 2 = 0, und das erste Glied 1 ist, lauter Einzen. Diese zweyeckige Zahlen können nicht anders durch Punkte vorgestellt werden, als in einer geraden Linie, denn diese ihre zwey Endpuncte stellen die zwey Winkelpuncte vor, aber genau genommen, giebt es so wenig 2eckige Zahlen, als es eine 2seitige geradlinigte Figur giebt. Die kleinste Figur ist die, worin m = 3 ist.

§. 438.

Um diese Regel mit einigen Beispielen zu erläutern, so suche man die XXV eckige Zahl, deren Seite 36 ist. Man suche erstlich für die Seite n die XXV

eckige

eckige Zahl; dieses geschiehet, indem man in der allgemeinen Formel $m = 25$ setzt, so wird dieselbe $= \frac{23n^2 - 21n}{2}$. Nun setze man $n = 36$, so bekommt man die gesuchte Zahl $= \frac{23.36^2 - 21.36}{2} = 14526$.

§. 439.

Frage. Einer hat ein Haus gekauft und wird gefragt, wie theuer? darauf antwortet er, die Zahl der Thaler, die er dafür bezahlet, sey die 365 eckige Zahl von 12.

Um nun diese Zahl zu finden, so wird $m = 365$, und also das 365eck von $n = \frac{363n^2 - 361n}{2}$. Nun ist $n = 12$, folglich das 365eck von $12 = \frac{363.12^2 - 361.12}{2}$ $= 23970$. Das Haus ist also mit 23970 Thaler bezahlt worden.

Zusatz. Euler hatte dieses Capitel überschrieben: Von den figurirten oder vieleckigen Zahlen. Warum wir das Wort figurirten weggelassen haben, wird aus folgendem erhellen.

Einige Algebraisten unterscheiden nicht ohne Grund figurirte und Polygonal-Zahlen. In der That entstehen auch die Zahlen, welche man gewöhnlich figurirte nennt, alle aus einer einzigen arithmetischen Progression, und jede Reihe dieser Zahlen wird gebildet, indem man die Glieder der vorhergehenden Reihe zusammen addirt.

Hingegen wird jede Reihe der Polygonalzahlen aus einer andern arithmetischen Progression gemacht; daher auch aufs strengste genommen nur eine einzige Reihe der figurirten Zahlen, zu gleicher Zeit eine Reihe von Polygonalzahlen ist. Eine aufmerksame Betrachtung der folgenden Tabelle wird einen jeden leicht davon überzeugen.

Figurirte Zahlen:

Beständige Zahlen	—	1, 1, 1, 1, 1, 1 u.s.f.
Natürliche —	—	1, 2, 3, 4, 5, 6 u.s.f.
Triagonal —	—	1, 3, 6, 10, 15, 21 u.s.f.
Pyramidal —	—	1, 4, 10, 20, 35, 56 u.s.f.
Trigonal-pyramidal.	—	1, 5, 15, 35, 70, 126 u.s.f.

u. s. f.

Poly-

Polygonalzahlen:

Differ. d. Reihe	Zahlen		
1	Triagonal	—	1, 3, 6, 10, 15 u. s. f.
2	Quadrat	—	1, 4, 9, 16, 25 u. s. f.
3	Pentagonal	—	1, 5, 12, 22, 35 u. s. f.
4	Hexagonal	—	1, 6, 15, 28, 45 u. s. f.

u. s. f.

Die Potenzen machen auch besondere Reihen von Zahlen aus. Die zwey ersten finden sich wieder in den figurirten Zahlen, und die 3te in den Polygonalzahlen; dieses wird man einsehen, in dem für a in der hier unten stehenden Tafel nach und nach die Zahlen 1, 2, 3 u. s. f. setzt.

Potenzenzahlen.

a^0	—	—	—	1, 1, 1, 1, 1, u. s. f.
a^1	—	—	—	1, 2, 3, 4, 5, u. s. f.
a^2	—	—	—	1, 4, 9, 16, 25, u. s. f.
a^3	—	—	—	1, 8, 27, 64, 125, u. s. f.
a^4	—	—	—	1, 16, 81, 256, 625, u. s. f.

u. s. f.

Die Algebraisten des 16ten und 17ten Jahrhunderts haben sich sehr viel mit diesen verschiedenen Arten von Zahlen und ihren Beziehungen unter einander beschäftiget; sie haben hierbey sonderbare Veränderungen und Eigenschaften entdeckt; aber da ihr Nutzen nicht sehr groß ist, so übergeht man mit Recht diese Art von Untersuchungen in den heutigen Lehrbüchern der Mathematik.

VI. Capitel.

Von den geometrischen Verhältnissen.

§. 440.

Das geometrische Verhältniß zwischen zwey Zahlen enthält die Antwort auf die Frage, wie vielmal die eine Zahl größer sey als die andere? und es wird gefunden, wenn man die eine durch die andere dividirt, daher denn der Quotient die Benennung des Verhältnisses anzeigt.

§. 441.

§. 441.

Es ist daher bey einem geometrischen Verhältnisse dreyerley zu betrachten. Erstlich, die erste der beyden gegebenen Zahlen, welche der Vorsatz oder das Vorderglied genannt wird. Zweytens, die andere derselben, welche der Nachsatz oder das Hinterglied heißt. Drittens, die Benennung oder Exponent des Verhältnisses, welche gefunden wird, wenn man den Vorsatz durch den Nachsatz dividirt, z. B. wenn zwischen den Zahlen 18 und 12 das Verhältniß angezeigt werden soll, so ist 18 der Vorsatz, 12 der Nachsatz, und der Exponent des Verhältnisses wird $\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$ seyn, woraus man erkennt, daß der Vorsatz 18 den Nachsatz 12, einmal und noch $\frac{1}{2}$ mal in sich begreift.

§. 442.

Um das geometrische Verhältniß zwischen zweyen Zahlen anzuzeigen, bedient man sich zweyer über einander stehender Puncte, die zwischen dem Vorsatz und Nachsatz gesetzt werden.

Also $a : b$ zeigt das Verhältniß zwischen a und b an, welches Zeichen, wie schon oben bemerkt worden, auch die Division anzuzeigen pflegt, und eben deswegen hier gebraucht wird, weil, um dieses Verhältniß zu erkennen, die Zahl a durch b getheilt werden muß. Dieses Zeichen wird mit Worten so ausgesprochen: a verhält sich zu b, oder schlechtweg a zu b.

§. 443.

Der Exponent oder Name eines solchen Verhältnisses wird daher durch einen Bruch vorgestellt, dessen Zähler der Vorsatz, der Nenner aber der Nachsatz ist. Um der Deutlichkeit willen aber muß man diesen Bruch immer auf seine kleinste Form bringen,

gen, welches geschieht, wenn man den Zähler und Nenner durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler theilet, wie oben geschehen, da der Bruch $\frac{18}{12}$ auf $\frac{3}{2}$ gebracht ist, indem man den Zähler und Nenner durch 6 getheilt hat.

§. 444.

Die Verhältnisse sind also nur in so fern unterschieden, als ihr Exponent verschieden ist, und es giebt daher so viel verschiedene Arten von Verhältnissen, als verschiedene Exponenten gefunden werden können.

Die erste Art ist nun unstreitig, wenn der Exponent 1 wird; und dieses geschieht, wenn die beyden Zahlen gleich sind, als 3:3, 4:4, a:a, wovon der Exponent 1 wird, und deswegen heißt diese Art das Verhältniß der Gleichheit.

Hierauf folgen diejenigen, deren Exponent eine ganze Zahl wird, als 4:2, wo der Exponent 2 ist. Ferner 12:4, wo der Exponent 3 ist, und 24:6, wo der Exponent 4 ist u. s. f.

Hernach kommen solche vor, deren Exponent durch Brüche ausgedrückt wird. Als 12:9, dessen Exponent $\frac{4}{3}$ oder $1\frac{1}{3}$ ist, 18:27, dessen Exponent $\frac{2}{3}$ ist u. s. f.

§. 445.

Es sey nun a der Vorsatz, b der Nachsatz und der Exponent d, so haben wir schon gesehen, daß, wenn a und b gegeben ist, daraus $d = \frac{a}{b}$ gefunden werde.

Ist aber der Nachsatz b nebst den Exponenten d gegeben, so findet man daraus den Vorsatz $a = bd$, weil bd durch b dividirt, d giebt; endlich wenn der Vorsatz a nebst den Exponenten d gegeben ist, so

findet

findet man daraus den Nachsatz $b = \frac{a}{d}$. Denn wenn man den Vorsatz a durch diesen Nachsatz $\frac{a}{d}$ dividirt, so ist der Quotient d, das ist der Exponent.

§. 446.

Ein jedes Verhältniß $a : b$ bleibt unverändert, wenn man den Vorsatz und Nachsatz mit einerley Zahl entweder multiplicirt oder dividirt, weil der Exponent einerley bleibt. Denn wenn d der Exponent von $a : b$ ist, also daß $d = \frac{a}{b}$, so ist auch von diesem Verhältniß $na : nb$ der Exponent $\frac{a}{b} = d$; und von diesem Verhältniß $\frac{a}{n} : \frac{b}{n}$ ist der Exponent gleichfalls $\frac{a}{b} = d$.

§. 447.

Wenn der Exponent in die kleinste Form gebracht worden, so läßt sich daraus das Verhältniß deutlich erkennen und mit Worten ausdrücken. Nemlich wenn der Exponent auf diesen Bruch $\frac{p}{q}$ gebracht worden, so sagt man $a : b = p : q$, das ist mit Worten: a zu b wie p zu q. Also da von diesem Verhältniß $6 : 3$ der Exponent $\frac{2}{1}$ oder 2 ist, so hat man $6 : 3 = 2 : 1$. Eben so sagt man $18 : 12 = 3 : 2$ und $24 : 18 = 4 : 3$ und ferner $30 : 45 = 2 : 3$. Läßt sich aber der Exponent nicht abkürzen, so wird auch das Verhältniß nicht deutlicher; denn wenn man $9 : 7 = 9 : 7$ sagt, so wird es nicht begreiflicher.

§. 448.

Wenn sich aber der Exponent auf sehr kleine Zahlen bringen läßt, so erhält man eine deutliche Erkenntniß von einem Verhältniß zwischen zwey sehr

großen Zahlen. Also wenn man 288 : 144 = 2 : 1 sagt, so ist die Sache ganz deutlich, und wenn man fragt, wie sich 105 : 70 verhalte, so antwortet man, wie 3 : 2. Fragt man weiter, wie sich 576 : 252 verhalte, so antwortet man, wie 16 : 7.

§. 449.

Um also ein jedes Verhältniß auf das deutlichste darzustellen, so muß man den Exponenten desselben auf die kleinsten Zahlen zu bringen suchen, welches auf einmal geschehen kann, wenn die beyden Glieder des Verhältnisses durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler dividirt werden. Also wird das Verhältniß 576 : 252 auf einmal zu diesem 16 : 7 gebracht, wenn man die beyden Zahlen 576 und 252 durch 36, welches ihr größter gemeinschaftlicher Theiler ist, dividirt.

§. 450.

Weil es nun hauptsächlich darauf ankommt, daß man von zwey gegebenen Zahlen ihren größten gemeinschaftlichen Theiler zu finden wisse, so soll dazu in dem folgenden Capitel die nöthige Anleitung gegeben werden.

VII. Capitel.

Von dem größten gemeinschaftlichen Theiler zweyer gegebenen Zahlen.

§. 451.

Es giebt Zahlen, welche außer 1 keinen andern gemeinschaftlichen Theiler haben, und wenn Zähler und Nenner eines Bruchs so beschaffen sind, so läßt sich derselbe auch in keine kleinere Form bringen.

Also

Also sieht man, daß diese beyden Zahlen 48 und 35 keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, ungeachtet eine jede für sich ihre besondern Theiler hat. Deswegen kann auch das Verhältniß 48 : 35 nicht in kleinern Zahlen ausgedrückt werden, denn ob gleich sich beyde durch 1 theilen lassen, so werden doch dadurch die Zahlen nicht kleiner.

§. 452.

Wenn aber die Zahlen einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so wird derselbe, und so gar der größte gemeinschaftliche Theiler durch folgende Regel gefunden:

Man dividire die größere Zahl durch die kleinere, durch den übrig bleibenden Rest dividire man ferner den vorhergehenden Divisor, durch den hier übrig bleibenden Rest dividire man wieder den letzt vorhergehenden Divisor, und auf solche Art verfahre man so lange, bis die Division aufgeht; da denn der letzte Divisor der größte gemeinschaftliche Theiler der beyden gegebenen Zahlen seyn wird.

Diese Untersuchung wird für die gegebenen Zahlen 576 und 252 also zu stehen kommen.

```
252|576|2
   |504|
   -----
     72|252|3
       |216|
       -----
         36|72|2
           |72|
           ----
             0
```

Hier ist also der größte gemeinschaftliche Theiler 36.

§. 453.

Es wird dienlich seyn, diese Regel durch einige

 Bey=

Beyspiele zu erläutern. Man suche daher den größten gemeinschaftlichen Theiler zwischen den Zahlen 504 und 312.

```
312|504|1
   |312|
   -----
    192|312|1
       |192|
       -----
        120|192|1
           |120|
           -----
             72|120|1
               | 72|
               -----
                 48|72|1
                   |48|
                   ----
                    24|48|2
                      |48|
                      ----
                        0
```

Also ist 24 der größte gemeinschaftliche Theiler, und deswegen läßt sich das Verhältniß 504 : 312 auf die bequemere Form 21 : 13 bringen.

§. 454.

Es seyen ferner diese zwey Zahlen 625 und 529 gegeben, für welche der größte gemeinschaftliche Theiler gesucht werden soll:

```
529|625|1
   |529|
   -----
     96|529|5
       |480|
       -----
         49|96|1
           |49|
           ----
            47|49|1
              |47|
              ----
                2|47|23
                 |46|
                 ----
                   1|2|2
                    |2|
                    ---
                     0
```

Hier

Hier ist also der größte gemeinschaftliche Theiler 1, und deswegen läßt sich das Verhältniß 625 : 529 auf keine leichtere Form bringen; oder dasselbe läßt sich durch keine kleinere Zahlen ausdrücken.

§. 455.

Es ist nun noch nöthig, den Beweis von dieser Regel zu geben. Es sey a die größere und b die kleinere der gegebenen Zahlen, d aber ein gemeinschaftlicher Theiler derselben. Da sich nun so wohl a als b durch d theilen lassen, so wird sich auch $a - b$ dadurch theilen, auch $a - 2b$ und $a - 3b$, und überhaupt $a - nb$.

Wenn a und b das gemeinschaftliche Maaß d haben, so ist $\frac{a \pm b}{d} = \frac{a}{d} \pm \frac{b}{d}$ auch eine ganze Zahl, weil die Summe oder Differenz zweyer ganzen Zahlen offenbar eine ganze Zahl seyn muß, daher ist $a \pm b$ auch durch d theilbar. Eben so schließt man, daß, da $a \pm b$ und b durch d theilbar ist, so muß es auch $a \pm b \pm b = a \pm 2b$ seyn u. s. f.

§. 456.

Dieses ist auch rückwärts wahr, und wenn die Zahlen b und $a - nb$ sich durch d theilen lassen, so muß sich auch die Zahl a dadurch theilen lassen. Denn da sich nb theilen läßt, so würde sich $a - nb$ nicht theilen lassen, wenn sich nicht auch a theilen ließe.

Es sey $\frac{nb}{d}$ = der ganzen Zahl q, so ist $\frac{a \pm nb}{d} = \frac{a}{d} \pm \frac{nb}{d} = \frac{a}{d} \pm q = p$, wo p ebenfalls eine ganze Zahl bedeutet, also muß $\frac{a}{d} = p \mp q$ seyn. Da nun p und q ganze Zahlen sind, so ist auch ihre Summe und

ihre Differenz eine ganze Zahl, daher auch $\frac{a}{d}$ eine ganze Zahl seyn muß.

§. 457.

Ferner ist zu merken, daß, wenn d der größte gemeinschaftliche Theiler der beyden Zahlen b und a — nb ist, derselbe auch der größte gemeinschaftliche Theiler der Zahlen a und b seyn werde. Denn wenn für diese Zahlen a und b noch ein größerer gemeinschaftlicher Theiler als d statt fände, so würde derselbe auch ein gemeinschaftlicher Theiler von b und a — nb, folglich d nicht der größte seyn. Nun aber ist d der größte gemeinschaftliche Theiler von b und a — nb, also muß auch d der größte gemeinschaftliche Theiler von a und b seyn.

§. 458.

Diese drey Sätze vorausgesetzt, wollen wir nun die größere Zahl a durch die kleinere b, wie die Regel befiehlt, theilen, und für den Quotienten n annehmen, so erhält man den Rest a — nb, welcher immer kleiner ist als b. Da nun dieser Rest a — nb mit dem Divisor b eben denselben größten gemeinschaftlichen Theiler hat, als die gegebenen Zahlen a und b, so theile man den vorigen Divisor b durch diesen Rest a — nb, und da wird ebenfalls der herauskommende Rest mit dem nächst vorhergehenden Divisor eben denselben größten gemeinschaftlichen Theiler haben, und so immer weiter.

§. 459.

Man fährt aber auf diese Art fort, bis man auf eine solche Division kommt, welche aufgeht oder wo kein Rest übrig bleibt. Es sey daher p der letzte Divisor, welcher gerade etliche mal in seinem Divi-

dendus

dendus enthalten ist, daher der Dividendus durch p theilbar seyn, folglich diese Form mp haben wird. Diese Zahlen nun p und mp lassen sich beyde durch p theilen, und haben ganz gewiß keinen größern gemeinschaftlichen Theiler, weil sich keine Zahl durch eine größere, als sie selbst ist, theilen läßt. Daher ist auch der letzte Divisor der größte gemeine Theiler der beyden im Anfang gegebenen Zahlen a und b, welches der Beweis der vorgeschriebenen Regel ist.

§. 460.

Wir wollen noch ein Exempel hersetzen und von diesen Zahlen 1728 und 2304 den größten gemeinschaftlichen Theiler suchen, da dann die Rechnung folgende seyn wird:

```
1728 | 2304 | 1
     | 1728 |
     ------
       576 | 1728 | 3
           | 1728 |
           ------
              0
```

Also ist 576 der größte gemeinschaftliche Theiler, und das Verhältniß 1728 : 2304 wird auf dieses gebracht 3 : 4; folglich verhält sich 1728 : 2304 eben so wie 3 : 4.

VIII. Capitel.

Von den geometrischen Proportionen.

§. 461.

Zwey geometrische Verhältnisse sind einander gleich, wenn sie beyde einerley Exponenten haben, und die Gleichheit zweyer solcher Verhältnisse wird eine geo-

metrische Proportion genannt, und auf folgende Art geschrieben: $a : b = c : d$, mit Worten aber wird dieselbe also ausgesprochen: a verhält sich zu b wie sich c verhält zu d, oder a zu b wie c zu d. Ein Beyspiel einer solchen Proportion ist nun $8 : 4 = 12 : 6$. Denn von dem Verhältniß $8 : 4$ ist der Exponent 2, und eben diesen Exponenten hat auch das Verhältniß $12 : 6$.

§. 462.

Wenn also $a : b = c : d$ eine geometrische Proportion ist, so müssen die Exponenten auf beyden Seiten gleich, und folglich $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ seyn; und umgekehrt, wenn die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ einander gleich sind, so ist $a : b = c : d$.

§. 463.

Eine geometrische Proportion besteht daher aus vier Gliedern, welche also beschaffen sind, daß das erste durch das zweyte dividirt eben so viel giebt, als das dritte durch das vierte dividirt. Hieraus folgt eine sehr wichtige Haupteigenschaft aller geometrischen Proportionen, welche darin besteht: daß das Product aus dem ersten und vierten Gliede immer eben so groß ist, als das Product aus dem zweyten und dritten. Oder kürzer: das Product der äußern Glieder ist dem Product der mittlern Gliedern gleich.

§. 464.

Um diese Eigenschaft zu beweisen, so sey $a : b = c : d$ eine geometrische Proportion, und also $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Man multiplicire einen jeden dieser Brüche mit b,

so bekommt man $a = \frac{bc}{d}$; man multiplicire ferner auf beyden Seiten mit d, so bekommt man ad = bc. Nun aber ist ad das Product der äußern Glieder und bc das Product der mittlern, welche beyde Producte, folglich einander gleich sind.

§. 465.

Wenn umgekehrt vier Zahlen a, b, c, d, so beschaffen sind, daß das Product der äußern ad dem Product der mittlern bc gleich ist, so stehen dieselben in einer geometrischen Proportion. Denn da ad = bc, so dividire man beyderseits durch bd, und man bekommt $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; daher wird a : b = c : d.

§. 466.

Die vier Glieder einer geometrischen Proportion als a : b = c : d können auf verschiedene Arten versetzt werden, so daß die Proportion bleibt. Es kommt nemlich nur darauf an, daß das Product der äußern Glieder dem Product der mittlern gleich bleibe, oder daß ad = bc. Also wird man haben, erstlich b : a = d : c, zweytens a : c = b : d, drittens d : b = c : a, viertens d : c = b : a.

§. 467.

Außer diesen lassen sich auch noch viele andere Proportionen aus einer gegebenen Proportion herleiten. Denn wenn a : b = c : d, so ist erstlich a + b : a oder das erste + dem andern zum ersten, wie c + d : c, oder das dritte + dem vierten zum dritten, nemlich a + b : a = c + d : c, oder auch a + b : b = c + d : d. Denn in der ersten Proportion ist das Product aus den äußern Gliedern ac + bc, und das Product aus den mittlern ac + ad. Da nun aus der angenommenen Grundproportion a : b

 = c : d

$= c : d$ die Gleichheit der Producte bc und ad fließt, so erhellet auch hieraus die Gleichheit der Producte $ac + bc$ und $ac + ad$; folglich die Richtigkeit der Proportion $a + b : a = c + d : c$ (§. 465). Auf eine ähnliche Art kann man sich auch von der Richtigkeit der letztern Proportion $a + b : b = c + d : d$ überzeugen, weil die äußern Glieder in einander multiplicirt eben so viel geben, als das Product aus den mittlern Gliedern.

Hernach ist auch das erste — dem andern zum ersten, wie das dritte — dem vierten zum dritten; oder $a - b : a = c - d : c$.

Denn nimmt man die Producte der äußern und mittlern Glieder, so ist offenbar $ac - bc = ac - ad$, weil $ad = bc$. Ferner wird auch $a - b : b = c - d : d$, weil $ad - bd = bc - bd$ und $ad = bc$ ist

§. 468.

Alle Proportionen, die sich aus der Proportion $a : b = c : d$ herleiten lassen, können folgendergestalt auf eine allgemeine Art vorgestellt werden:

$$ma + nb : pa + qb = mc + nd : pc + qd.$$

Denn das Product der äußern Glieder ist

$$mpac + npbc + mqad + nqbd,$$

und weil $ad = bc$, so wird dasselbe

$$mpac + npbc + mqbc + nqbd.$$

Das Product der mittlern Glieder aber ist

$$mpac + mqbc + npad + nqbd,$$

und weil $ad = bc$, so wird dasselbe

$$mpac + mqbc + npbc + nqbd,$$

welches mit jenem einerley ist.

Zusatz. Wenn $m = q = 1$ und $n = p = 0$, so wird aus obiger Proportion folgende:

$$a : b = c : d.$$

Wenn $m = n = q = 1$ und $p = 0$, so entstehet folgende Proportion:

$$a + b : b = c + d : d.$$

So würde man alle besondere Proportionen aus jener allgemeinen ableiten können, wobey man merken muß, daß hier das Zeichen + weiter nichts als Hinzufügung der Größen bedeuten soll, übrigens können allerdings diese hinzugefügten Größen negativ seyn, so daß in diesem letzten Fall die Proportion $a + b : b = c + d : d$ in folgende verwandelt: $a - b : b = c - d : d$ werden kann.

§. 469.

Also kann man aus einer gegebenen Proportion, als z. B. $6 : 3 = 10 : 5$, unendlich viel andere herleiten, wovon wir nur einige hersetzen wollen:

1) $3 : 6 = 5 : 10$.

2) $6 : 10 = 3 : 5$.

3) $(3+6) : 6 = (5+10) : 10$ oder $9 : 6 = 15 : 10$, folgt aus No. 1.

4) $(6-3) : 3 = (10-5) : 5$ oder $3 : 3 = 5 : 5$, folgt aus $6 : 3 = 10 : 5$.

5) $(3+6) : 3 = (5+10) : 5$ oder $9 : 3 = 15 : 5$, folgt aus $6 : 3 = 10 : 5$.

6) $9 : 15 = 3 : 5$, folgt aus No. 5.

§. 470.

Da in einer geometrischen Proportion das Product der äußern Glieder dem Product der mittlern gleich ist, so kann man, wenn die drey ersten Glieder bekannt sind, aus denselben das vierte finden. Es seyen die drey ersten Glieder $24 : 15 = 40$ zu . . . Denn da hier das Product der mittlern 600 ist, so muß das vierte Glied mit dem ersten, das ist mit 24 multiplicirt, auch 600 machen, folglich muß man 600 durch 24 dividiren, und da wird der Quotient das gesuchte vierte Glied 25 geben. Daher ist die Proportion $24 : 15 = 40 : 25$. Und wenn allgemein die drey ersten Glieder $a : b = c :$ . . . sind, so setze man für das unbekannte vierte Glied den Buchstaben d, und da $ad = bc$ seyn muß, so dividire man beyder-

beyderseits durch a und man wird $d = \frac{bc}{a}$ bekommen; folglich ist das vierte Glied $= \frac{bc}{a}$; woraus sich die allgemeine Regel herleiten läßt, daß man die vierte geometrische Proportionalzahl findet, wenn man das zweyte Glied mit dem dritten multiplicirt und das Product durch das erste Glied dividirt.

§. 471.

Hierauf beruhet nun der Grund der in allen Rechenbüchern so berühmten Regeldetri, weil darin aus drey gegebenen Zahlen allezeit eine solche vierte gesucht wird, welche mit jenen in einer geometrischen Proportion stehet, also daß sich die erste verhalte zur zweyten, wie die dritte zur vierten.

§. 472.

Hierbey sind noch einige besondere Umstände zu bemerken, als: wenn zwey Proportionen einerley erstes und drittes Glied haben, wie in diesen $a : b = c : d$ und $a : f = c : g$, so werden auch die zweyten den vierten proportional seyn, es wird sich nemlich verhalten $b : d = f : g$; denn da aus der ersten $a : c = b : d$, und aus der andern $a : c = f : g$ folgt, so sind die Verhältnisse $b : d$ und $f : g$ einander gleich, weil ein jedes dem Verhältnisse $a : c$ gleich ist. Also da $5 : 100 = 2 : 40$ und $5 : 15 = 2 : 6$, so folgt daraus, daß $100 : 40 = 15 : 6$.

§. 473.

Wenn aber zwey Proportionen so beschaffen sind, daß sich einerley mittlere Glieder darin befinden, so werden sich die ersten Glieder umgekehrt verhalten, wie die vierten. Wenn nemlich $a : b = c : d$ und

f : b = c : g, so wird daraus a : f = g : d folgen. Es sey z. B. diese Proportion gegeben: 24 : 8 = 9 : 3 und 6 : 8 = 9 : 12, so wird daraus folgen 24 : 6 = 12 : 3. Der Grund davon ist offenbar; denn die erste giebt ad = bc und die zweyte fg = bc, folglich wird ad = fg, und a : f = g : d, oder a : g = f : d.

§. 474.

Aus zwey gegebenen Proportionen aber kann immer eine neue gemacht werden, wenn man die ersten und die zweyten, die dritten und die vierten Glieder mit einander multiplicirt. Also aus diesen Proportionen a : b = c : d und e : f = g : h entstehet durch die Zusammensetzung diese: ae : bf = cg : dh. Denn nach der ersten Proportion ist ad = bc und aus der zweyten folgt eh = fg, also wird auch adeh = bcfg seyn. Nun aber ist adeh das Product der äußern, und bcfg das Product der mittlern Glieder in der neuen Proportion, welche folglich einander gleich sind.

§. 475.

Es seyen z. B. diese zwey Proportionen gegeben: 6 : 4 = 15 : 10 und 9 : 12 = 15 : 20, so giebt die Zusammensetzung derselben folgende Proportion:

6. 9 : 4. 12 = 15. 15 : 10. 20,
das ist 54 : 48 = 225 : 200,
oder 9 : 8 = 9 : 8.

§. 476.

Zuletzt ist hier noch zu merken, daß, wenn zwey Producte einander gleich sind, als ad = bc, daraus wieder eine geometrische Proportion gebildet werden kann. Es verhält sich nemlich immer der eine Factor des ersten Products zu einem des zweyten, wie der andere Factor des zweyten zum andern des ersten.

Es wird daher a : c = b : d seyn. Da z. B. 3. 8 = 4. 6, so folgt daraus diese Proportion: 8 : 4 = 6 : 3 oder 3 : 4 = 6 : 8, und da 3. 5 = 1. 15, so bekommt man 3 : 15 = 1 : 5 oder 5 : 1 = 15 : 3 oder 3 : 1 = 15 : 5.

IX. Capitel.

Anmerkungen über den Nutzen der Proportionen.

§. 477.

Diese Lehre ist in dem gemeinen Leben und im Handel und Wandel von solcher Nothwendigkeit, daß fast niemand dieselbe entbehren kann. Die Preise und Waaren sind einander immer proportional und bey den verschiedenen Geldsorten kommt alles darauf an, ihre Verhältnisse zu einander zu bestimmen. Dieses wird dazu dienen, daß die vorgetragene Lehre besser erläutert und zum Nutzen angewendet werden kann.

§. 478.

Will man das Verhältniß zwischen zwey Münzsorten, z. B. zwischen einem Louisd'or und einem Ducaten erforschen, so muß man sehen, wie viel diese Stücke nach einerley Münzsorte gelten. Ein Louisd'or gilt in Conventionsgelde 5 Thaler, und ein Ducaten 2 Thaler 20 Groschen, d. i. $2\frac{5}{6}$ Thaler. Hieraus erhellt folgende Proportion:

1 Louisd'or : 1 Ducaten = 5 Thl. : $2\frac{5}{6}$ Thl.

Wenn man nun, um den Bruch wegzuschaffen, die letzten beyden Glieder dieser Proportion mit 6 multiplicirt, so erhält man:

1 Louis-

1 Louisd'or : 1 Ducaten = 30 : 17.

Eben dieses Verhältniß würde man auch bekommen haben, wenn man die beyden Münzsorten durch Groschen ausgedrückt hätte. Denn da 5 Thl. = 120 Groschen und 2 Thl. 20 Groschen = 68 Groschen, so hat auch folgende Proportion ihre Richtigkeit:

1 L. : 1 D. = 120 : 68,

d. i. wenn man mit 4 dividirt = 30 : 17.

Durch Hülfe dieses Verhältnisses, nach welchem 17 Louisd'or gerade 30 Ducaten gleich gelten, (weil das Product der äußern Glieder dem Producte der mittlern gleich seyn muß) läßt sich also ohne Schwierigkeit eine gegebene Summe Ducaten in Louisd'or und umgekehrt eine Menge Louisd'or in Ducaten verwandeln. Denn fragt man z. B. wie viel 1000 Louisd'or in Ducaten betragen, so darf man nur folgendergestalt schließen:

17 L. : 1000 L. = 30 D. : x D.

Das vierte Glied aber, nemlich x Ducaten ist:

$\frac{30 . 1000}{17} = 1764\frac{12}{17}$ Ducaten (§. 470).

Fragt man aber, wie viel 1000 Ducaten in Louisd'or betragen, so setzt man diese Regeldetri:

30 D. : 1000 D. = 17 L. : x L.

also x Louisd'or = $\frac{17 . 1000}{30} = 566\frac{2}{3}$ Louisd'or.

§. 479.

In Petersburg ist der Werth eines Ducaten sehr veränderlich und beruhet auf dem Wechselcours, wodurch der Werth eines Rubels in holländischen Stübern bestimmt wird, deren 105 einen Ducaten ausmachen.

Wenn also der Cours 45 Stüber ist, so hat man diese Proportion: 1 Rbl. : 1 D. = 45 : 105 = 3 : 7, und daher diese Vergleichung: 7 Rbl. =

3 Duc.

3 Duc. Hieraus kann man finden, wie viel ein Ducaten in Rubel betrage: denn 3 D. : 7 Rbl. = 1 D. : . . . Antwort $2\frac{1}{3}$ Rubel. Ist aber der Cours 50 Stüber, so hat man diese Proportion 1 Rbl. : 1 D. = 50 : 105 = 10 : 21, und daher diese Vergleichung: 21 Rbl. = 10 Duc. Hieraus wird 1 Duc. = $2\frac{1}{10}$ Rubel. Ist aber der Cours nur 44 Stüber, so hat man 1 Rubel : 1 Duc. = 44 = 105, und also 1 Duc. = $2\frac{17}{44}$ Rbl. = 2 Rbl. $38\frac{7}{11}$ Cop.

§. 480.

Auf eben diese Art kann man auch mehr als zwey verschiedene Münzsorten unter sich vergleichen, welches bey Wechseln häufig geschieht. Um davon ein Beyspiel zu geben, so soll jemand von Petersburg 1000 Rubel nach Berlin übermachen, und verlangt daher zu wissen, wie viel diese Summe zu Berlin in Ducaten betragen werde. Angenommen, daß der Cours in Petersburg $47\frac{1}{2}$ Stüber (nemlich ein Rbl. macht $47\frac{1}{2}$ Stüber holländisch). Hernach in Holland machen 20 Stüber einen Fl. holl. Ferner $2\frac{1}{2}$ Fl. holl. machen einen Species-Thl. holl. Ferner ist der Cours von Holland nach Berlin 142, das ist für 100 Spec. Thl. zahlt man in Berlin 142 Thl. Endlich gilt 1 Duc. in Berlin 3 Thl.

§. 481.

Um diese Frage aufzulösen, so wollen wir erstlich Schritt vor Schritt gehen. Wir fangen also bey den Stübern an, und da 1 Rbl. = $47\frac{1}{2}$ Stüber, oder 2 Rbl. = 95 Stb., so setzt man: 2 Rbl. : 95 Stb. = 1000 . . . Antwort: 47500 Stüber. Ferner gehen wir weiter und setzen 20 Stb. : 1 Fl. = 47500 Stb. . . . Antwort: 2375 Fl.

Ferner

Ferner da $2\frac{1}{2}$ Fl. = 1 Spec. Thl., das ist, da 5 Fl. = 2 Sp. Thaler, so setzt man 5 Fl. : 2 Sp. Thl. = 2375 Fl. zu . . . Antwort: 950 Sp. Thl.

Hierauf kommen wir auf berliner Thl. nach dem Cours zu 142. Also 100 Sp. Thl. : 142 Thl. = 950 . . . Antwort: 1349 Thl.

Nun gehen wir endlich zu den Ducaten und setzen also: 3 Thl. : 1 Ducaten = 1349 Thl. zu . . . Antwort: $449\frac{2}{3}$ Ducaten.

§. 482.

Um diese Rechnungsart noch mehr zu erläutern, so wollen wir annehmen, der Banquier zu Berlin mache Schwierigkeit diese Summe zu bezahlen, unter einem oder dem andern Vorwand, was es auch für einer seyn mag, und lasse sich hiezu nur durch die Bewilligung eines Abzugs von 5 Procent bewegen. Dieses ist aber so zu verstehen, daß er anstatt 105 nur 100 bezahlt, daher muß noch diese Proportion hinzugefügt werden: 105 : 100 = $449\frac{2}{3}$ zu . . . . Giebt also $428\frac{16}{63}$ Ducaten.

§. 483.

Zur Auflösung dieser Frage wurden nun sechs Rechnungen nach der Regeldetri erfordert; man hat aber Mittel gefunden, diese Rechnungen durch Hülfe der sogenannten Kettenregel sehr abzukürzen. Um diese zu erklären, so wollen wir von den sechs obigen Rechnungen die zwey Vordersätze betrachten und hier vor Augen legen:

I.) 2 Rbl. : 95 Stüb.	II. 20 Stüb. : 1 Fl. holl.
III.) 5. Fl. holl. : 2 Sp. Thl.	IV. 100 Sp. Thl. : 142 Thl.
V.) 3. Thl. : 1 Sp. Ducaten	VI.) 105 Duc. : 100 Duc.

Wenn wir nun diese Rechnungen betrachten, so finden wir, daß wir die gegebene Summe immer durch die zweyten Sätze multiplicirt und durch die

ersten dividirt haben; daraus zeigt sich, daß man eben dieses finden werde, wenn man die gegebene Summe auf einmal mit dem Product aller zweyten multiplicirt und durch das Product aller ersten Sätze dividirt; oder wenn man diese einzige Regeldetri macht: wie sich das Product aller ersten Sätze verhält zu dem Producte aller zweyten Sätze, also verhält sich die gegebene Anzahl Rubel zu der Anzahl Ducaten, die in Berlin bezahlt wird.

§. 484.

Diese Rechnung wird noch mehr abgekürzt, wenn sich irgend ein erster Satz gegen irgend einen zweyten Satz aufheben läßt, da man denn dieselben Sätze ausstreicht und an ihrer Stelle die Quotienten setzt, welche man durch die Aufhebung erhält. Auf diese Art wird obiges Exempel also zu stehen kommen:

Thl.	~~2~~.	19 ~~95~~ St. holl. Cur.	1000 Thl.
	~~20~~.	1 holl. Fl.	
	~~5~~.	~~2~~ Sp. Thl.	
	100.	142 Thl.	
	3.	1 Duc.	
	~~105~~. 21	~~5~~, ~~100~~ Duc.	

63~~00~~ : 2698 = 10~~00~~ zu . . .

7) 26980

9) 3854 (2

428 (2 Antwort: $428\frac{16}{63}$ Ducaten.

§. 485.

Wenn man die Kettenregel gebrauchen will, so muß man folgende Ordnung beobachten: man fängt mit eben der Münzsorte an, von welcher die Frage ist, und vergleicht dieselbe mit einer andern, mit welcher das folgende Verhältniß wieder anfängt, um

diese

diese Münzsorte mit einer dritten zu vergleichen, so daß ein jedes Verhältniß mit eben der Münzsorte anfängt, mit welcher das vorige aufgehört, und so fährt man fort, bis man auf diejenige Sorte kömmt, in welcher die Antwort stehen soll; zuletzt werden noch die Spesen oder Unkosten berechnet.

§. 486.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch einige Beyspiele hersetzen.

Wenn die Ducaten in Hamburg 1 p. C. besser sind als 2 Thl. B° (das ist, wenn 50 Duc. nicht 100, sondern 101 Thl. B° machen) und der Cours zwischen Hamburg und Königsberg 119 Gr. poln. (das ist, 1 Thl. B° macht 119 Gr. poln.) wie viel betragen 1000 Ducaten in Fl. pol. (30 Gr. pol. machen 1 Fl. pol.)

Duc. 1	:	7 Thl. B°	1000 Duc.
1̸0̸0̸, 50	:	101 Thl. B°	
1	:	119 Gr. pol.	
30	:	1 Fl. pol.	
150̸0̸		12019 = 100̸0̸ Duc. zu . . .	

3) 120190

5) 40063 (1

8012 (3 Antwort: 8012 $\frac{2}{3}$ Fl. pol.

§. 487.

Noch zu mehrerer Abkürzung kann die Fragezahl über die zweyte Reihe gesetzt werden, da denn das Product der zweyten Reihe, durch das Product der ersten dividirt, die verlangte Antwort giebt.

Beyspiel: Leipzig läßt aus Amsterdam Ducaten kommen, welche daselbst 5 Fl. 4 St. Courant gelten (das ist, ein Duc. gilt 104 St. oder 5 Duc.

machen 26 Fl. holl.) Wenn nun Agio di B° in Amsterdam 5 p. C. (das ist 105 Cour. macht 100 B°) und der Wechselcours von Leipzig nach Amsterdam in B° $133\frac{1}{4}$ p. C. (das ist für 100 Thl. zahlt man in Leipzig $133\frac{1}{4}$ Thl.). Endlich 2 Thl. holl. 5 Fl. holl. thun, wie viel sind nach diesen Coursen für solche 1000 Ducaten in Leipzig an sächsischen Gelde zu bezahlen.

		5, 1000 Duc.
Duc. 5	:	26 Fl. holl. Cour.
105, 21	:	4, 20, 100 Fl. holl. B°
5	:	2 Thl. holl. B°
400, 2	:	533 Thl. in Leipzig
21	:	3) 55432 (1
		7) 18477 (4
		2639

Antwort: $2639\frac{13}{21}$ Thl.
oder 2639 Thl. 15 gute Grsch.

X. Capitel.

Von den zusammengesetzten Verhältnissen.

§. 488.

Zwey oder mehr Verhältnisse werden zusammengesetzt, wenn man sowohl die Vordersätze als die Hintersätze besonders mit einander multiplicirt; und alsdann sagt man, daß das Verhältniß zwischen diesen beyden Producten aus den zwey oder mehr gegebenen Verhältnissen zusammengesetzt sey.

Z. B.

z. B. aus den Verhältnissen a : b, c : d, e : f entsteht durch die Zusammensetzung dieses Verhältniß: ace : bdf.

§. 489.

Da ein Verhältniß einerley bleibt, wenn man seine beyden Glieder durch einerley Zahl dividirt oder abkürzt, so kann man die obige Zusammensetzung sehr erleichtern, wenn man die Vordersätze gegen die Hintersätze aufhebt oder abkürzt, wie schon im vorigen Capitel geschehen ist.

Also aus folgenden gegebenen Verhältnissen wird das daraus zusammengesetzte solcher Gestalt gefunden.

Die gegebenen Verhältnisse sind:

12 : 25, 28 : 33 und 55 : 56

12, 4, 2	:	5 25
28	:	3, 33
55, 5	:	2, 56
2	:	5

Also erhält man durch die Zusammensetzung das Verhältniß 2 : 5.

§. 490.

Eben dieses findet auch auf eine allgemeine Art bey den Buchstaben statt; und es ist besonders der Fall merkwürdig, wo immer ein Vordersatz dem vorigen Hintersatz gleich ist. Also wenn die gegebenen Verhältnisse sind:

a : b
b : c
c : d
d : e
e : a

so ist das zusammengesetzte Verhältniß wie 1 : 1.

§. 491.

Um den Nutzen dieser Lehre zu zeigen, so bemerke man, daß zwey viereckige Felder unter sich ein Verhältniß haben, welches aus den Verhältnissen ihrer Längen und ihrer Breiten zusammengesetzt ist.

Es heißen z. B. zwey solche Felder A und B. Von jenem sey die Länge 500 Fuß, die Breite aber 60 Fuß. Von diesem sey die Länge 360 Fuß und die Breite 100 Fuß, so ist das Verhältniß der Länge wie 500 : 360 und der Breite wie 60 : 100.

~~500~~ 5 : 6, ~~360~~
~~60~~ : ~~100~~
5 : 6

Also verhält sich das Feld A zu dem Felde B wie 5 zu 6.

§. 492.

Ein anderes Beyspiel. Das Feld A sey 720 Fuß lang und 88 Fuß breit; das Feld B aber sey 660 Fuß lang und 90 Fuß breit, so muß man folgende zwey Verhältnisse zusammensetzen:

Verhältniß der Längen ~~720~~, 8 : 15, ~~60~~, ~~660~~
Verhältniß der Breiten ~~88~~, ~~8~~, 2 : ~~90~~
16 : 15

Und dieses ist das Verhältniß der Felder A und B.

§. 493.

Um ferner den Raum oder Inhalt zweyer Zimmer gegen einander zu vergleichen, so ist bekannt, daß ihr Verhältniß aus dreyen zusammengesetzt ist, nemlich aus dem Verhältniß der Länge, der Breite und der Höhe. Es sey z. B. ein Zimmer A, dessen Länge = 36 Fuß, die Breite = 16 Fuß und die Höhe = 14 Fuß. Von einem andern Zimmer B aber sey die Länge = 42 Fuß, die Breite = 24 Fuß und die Höhe = 10 Fuß, so sind die drey Verhältnisse:

der

der Länge	~~36~~, ~~6~~, 3	:	~~42~~, ~~6~~
der Breite	~~16~~, 2,	:	~~24~~, 3
der Höhe	~~14~~, 2,	:	~~10~~, 5
	4	:	5

Also verhält sich der Inhalt des Zimmers A zu dem Inhalt des Zimmers B wie 4 zu 5.

§. 494.

Wenn die Verhältnisse, welche man auf diese Art zusammensetzt, einander gleich sind, so entstehen daraus vervielfältigte Verhältnisse. Nemlich aus zwey gleichen entsteht ein doppeltes oder quadratisches Verhältniß; aus drey gleichen ein dreyfaches oder cubisches u. s. f. Also aus den Verhältnissen a : b und a : b ist das zusammengesetzte Verhältniß $a^2 : b^2$; daher sagt man, die Quadrate stehen in einem doppelten Verhältniß ihrer Seiten. Und aus dem Verhältniß a : b dreymal gesetzt, entsteht das Verhältniß $a^3 : b^3$, daher sagt man, daß die Cubi ein dreyfaches Verhältniß ihrer Seiten haben.

§. 495.

In der Geometrie wird gezeigt, daß zwey kreisrunde Plätze in dem doppelten Verhältnisse ihrer Durchmesser stehen, d. h. daß sie sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten.

Es sey ein solcher Platz A, dessen Durchmesser = 45 Fuß; der Durchmesser eines andern cirkelrunden Platzes B aber sey = 30 Fuß, so wird sich jener Platz zu diesem wie 45. 45 zu 30. 30 verhalten, oder ihr Verhältniß ist aus folgenden zwey gleichen Verhältnissen zusammengesetzt:

~~45~~, ~~9~~, 3	:	~~30~~, ~~6~~, 2
~~45~~, ~~9~~, 3	:	~~30~~, ~~6~~, 2
9	:	4

Folglich verhalten sich diese Plätze wie 9 zu 4.

§. 496.

Ferner wird auch in der Geometrie bewiesen, daß sich die Inhalte zweyer Kugeln, wie die Cubiczahlen ihrer Durchmesser verhalten. Wenn also der Durchmesser einer Kugel A ein Fuß, und einer andern Kugel B zwey Fuß ist, so wird der Inhalt der Kugel A sich zum Inhalt der Kugel B wie $1^3 : 2^3$ oder wie $1 : 8$ verhalten.

Wenn also diese Kugeln aus einerley Materie bestehen, so wird die Kugel B achtmal mehr wiegen, als die Kugel A.

§. 497.

Hieraus kann man das Gewicht der Kanonenkugeln aus ihren Durchmessern finden, wenn man nur von einer das Gewicht hat. Es sey z. B. das Gewicht einer Kugel A, 5 Pfund und ihr Durchmesser = 2 Zoll; man fragt nach dem Gewicht einer andern Kugel B, deren Durchmesser = 8 Zoll ist. Hier hat man nun diese Proportion $2^3 : 8^3 = 5 : x$. Das Gewicht x, d. i. der Kugel B, beträgt also 320 ℔. Von einer andern Kugel C aber, deren Durchmesser = 15 Zoll, wird das Gewicht gefunden:

$2^3 : 15^3 = 5 : x$. Antwort: $2109\frac{3}{8}$ ℔ = x.

§. 498.

Sucht man das Verhältniß zweyer Brüche, als $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, so kann dasselbe immer durch ganze Zahlen ausgedrückt werden; denn man darf nur beyde Brüche mit bd multipliciren, so kommt dieses Verhältniß ad : bc heraus, welches jenem gleich ist, daher entsteht folgende Proportion $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$. Läßt sich nun ad gegen bc noch abkürzen, so wird das Verhältniß noch leichter. Also $\frac{15}{24} : \frac{25}{36} = 15 . 36 : 24 . 25 = 9 : 10$.

§. 499.

§. 499.

Es wird ferner gefragt, wie sich diese Brüche $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ gegen einander verhalten; hier ist sogleich erwiesen, daß sich $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ wie b : a verhält, welches mit Worten also ausgesprochen wird: daß sich zwey Brüche, deren Zähler 1 ist, unter sich umgekehrt, wie ihre Nenner verhalten. Dieses gilt auch von zweyen Brüchen, welche gleiche Zähler haben. Denn da $\frac{c}{a} : \frac{c}{b} = b : a$, so verhalten sie sich gleichfalls umgekehrt wie ihre Nenner. Haben aber zwey Brüche gleiche Nenner, als $\frac{a}{c} : \frac{b}{c}$, so verhalten sie sich wie die Zähler, nemlich wie a : b. Also ist $\frac{3}{8} : \frac{3}{16} = \frac{6}{16} : \frac{3}{16} = 6 : 3 = 2 : 1$ und $\frac{10}{7} : \frac{15}{7} = 10 : 15$ oder 2 : 3.

§. 500.

Bey dem freyen Fall der Körper bemerkt man, daß in einer Secunde ein Körper 15 par. Fuß tief herab falle, in zwey Secunden aber falle er durch eine Höhe von 60 Fuß, und in drey Secunden 135 Fuß, daraus hat man nun geschlossen, daß sich die Höhen verhalten, wie die Quadrate der Zeiten; und also auch rückwärts die Zeiten, wie die Quadratwurzeln aus den Höhen.

Fragt man nun, wie viel Zeit ein Stein brauche, um aus einer Höhe von 2160 Fuß herunter zu fallen, so ist 15 : 2160 = 1 : Quadrat der gesuchten Zeit.

Also ist das Quadrat der gesuchten Zeit 144, die Zeit aber selbst = $\sqrt{144}$ = 12 Secunden.

§. 501.

Man fragt ferner, wie tief ein Stein in einer Stunde herunter fallen könne, das ist in 3600 Secunden?

Man sagt also: wie die Quadrate der Zeiten, das ist wie $1^2 : 3600^2$, also verhält sich die gegebene Höhe = 15 Fuß zu der gesuchten Höhe

$$1 : 12960000 = 15 \text{ zu} \ldots$$

```
      15
  ---------
   64800000
   1296
  ---------
  194400000  Antwort: 194400000 Fuß.
```

Rechnen wir nun 24000 Fuß auf eine deutsche Meile, so wird diese Höhe 8100 Meilen seyn, welche Höhe größer ist als viermal die ganze Dicke der Erde.

§. 502.

Eine gleiche Bewandniß hat es mit dem Preis der Edelsteine, welcher sich nicht nach ihrem Gewicht selbst, sondern nach einem größern Verhältniß richtet. Bey den Diamanten gilt diese Regel: der Preis verhält sich, wie das Quadrat des Gewichts, oder das Verhältniß der Preise ist dem doppelten Verhältnisse des Gewichts gleich. Sie werden nun nach einem Gewicht, welches ein Karath genannt wird, und vier Gran hält, gewogen. Wenn nun ein Diamant von einem Karath zwey Thlr. gilt, so wird ein Diamant von 100 Karath so vielmal mehr gelten, als das Quadrat von 100 größer ist, wie das Quadrat von 1. Also muß die Regeldetri so gesetzt werden:

$1^2 : 100^2 = 2$ Thlr. . . .

oder $1 : 10000 = 2$ Thlr. zu . . . Antwort 20000 Th.

In Portugal befindet sich ein Diamant von 1680 Karath, dessen Preiß daher also gefunden wird:

$1^2 : 1680^2 = 2$ Thlr. : — oder

$1 : 2822400 = 2$: . . . Antwort 5644800 Thlr.

§. 503.

Von zusammengesetzten Verhältnissen geben die Posten ein merkwürdiges Beispiel, weil das Postgeld nach einem zusammengesetzten Verhältnisse der Zahl der Pferde, und der Zahl der Meilen bezahlt werden muß. Wenn also für ein Pferd auf eine Meile 8 Gr. oder $\frac{1}{3}$ Thlr. bezahlt wird, und man wissen will, wie viel für 28 Pferde auf $4\frac{1}{2}$ Meile bezahlt werden soll? so setzt man erstlich das Verhältniß der Pferde, das ist 1 : 28, darunter schreibt man das Verhältniß der Meilen 2 : 9, und setzt die zwey Verhältnisse zusammen 2 : 252, oder kürzer 1 : 126 = $\frac{1}{3}$ zu . . . Antwort 42 Thlr.

Wenn man für 8 Pferde auf 3 Meilen einen Ducaten bezahlt, wie viel kosten 30 Pferde auf 4 Meilen? Hier kommt die Rechnung also zu stehen:

~~8~~, ~~2~~ : ~~30~~, ~~15~~, 5
~~3~~ : ~~4~~

1 : 5 = 1 Ducaten : . . .

Daher ist die Bezahlung 5 Ducaten.

§. 504.

Auch bey Arbeitern kommt diese Zusammensetzung der Verhältnisse vor, da die Bezahlung nach dem zusammengesetzten Verhältniß der Zahl der Arbeiter, und der Zahl der Tage geschehen muß.

Wenn also z. B. einem Maurer täglich 10 Gr. gegeben wird und man will wissen, wie viel an 24 Maurer, welche 50 Tage lang gearbeitet haben, bezahlt werden soll? so steht die Rechnung also:

1 : 24
1 : 50
1 : 1200 = 10 Gr. : 500 Thlr.
10
12000 Gr.
3) 4000
8) 500 Thlr.

Weil in dergleichen Beispielen fünf Sätze gegeben sind, so wird in den Rechenbüchern die Art, dieselben zu berechnen, die Regelquinque genannt.

XI. Capitel.

Von den geometrischen Progressionen.

§. 505.

Eine Reihe Zahlen, welche immer gleich vielmal größer oder kleiner werden, wird eine geometrische Progression genannt, weil immer ein jedes Glied zu dem folgenden in eben demselben geometrischen Verhältnisse steht, und die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal ein jedes Glied größer ist, als das vorhergehende, heißt der Nenner oder der Exponent; wenn also das erste Glied 1 ist und der Nenner = 2, so ist die geometrische Progression folgende:

Glieder	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Prog.	1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	256,	512 u.s.f.

(Es sind hier die Anzeiger darüber gesetzt, um anzuzeigen, das wievielste Glied ein jedes sey.)

§. 506.

§. 506.

Wenn man überhaupt das erste Glied = a und den Nenner = b setzt, so kommt die geometrische Progression also zu stehen:

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8.	. .	n
Prog.	a,	ab,	ab^2,	ab^3,	ab^4,	ab^5,	ab^6,	ab^7,	. . .	ab^{n-1}

Wenn also diese Progression aus n Gliedern besteht, so ist das letzte $= ab^{n-1}$. Hier ist zu merken, wenn der Nenner b größer ist als 1, daß die Glieder immer größer werden, ist aber der Nenner $b = 1$, so bleiben die Glieder immer einander gleich, und ist der Nenner b kleiner als 1, oder ein Bruch, so werden die Glieder auch immer kleiner. Also wenn $a = 1$ und $b = \frac{1}{2}$, so bekommt man diese geometrische Progression:

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{16},\ \tfrac{1}{32},\ \tfrac{1}{64},\ \tfrac{1}{128}\ \text{u. s. f.}$$

§. 507.

Hierbey ist noch folgendes zu betrachten:

I.) das erste Glied, welches hier a genannt wird,

II.) der Nenner, welcher hier b genannt wird,

III.) die Anzahl der Glieder, welche = n gesetzt worden,

IV.) das letzte Glied, welches gefunden worden $= ab^{n-1}$.

Daher wenn die drey ersten Stücke gegeben sind, so wird das letzte Glied leicht nach folgender Regel außer der Reihe gefunden: man erhebt den Nenner zu einer Dignität, deren Exponent 1 weniger beträgt, als die Zahl der Glieder, und multiplicirt hernach diese Dignität in das erste Glied.

Wollte man nun von dieser geometrischen Progression: 1, 2, 4, 8 u. s. f. das 50ste Glied wissen, so ist hier $a = 1$, $b = 2$ und $n = 50$; daher das 50ste Glied $= 2^{49}$ seyn wird. Da nun $2^9 = 512$, so ist $2^{10} = 1024$. Hiervon das Quadrat genommen, giebt

giebt $2^{20} = 1048576$. Hiervon wieder das Quadrat genommen, giebt $2^{40} = 1099511627776$. Wenn man nun 2^{40} mit $2^9 = 512$ multiplicirt, so bekommt man $2^{49} = 512 . 1099511627776 = 562949953421312$.

§. 508.

Hierbey pflegt nun besonders gefragt zu werden, wie man die Summe aller Glieder einer solchen Progression finden soll; dieses wollen wir hier folgendergestalt zeigen.

Es sey erstlich diese Progression von zehn Gliedern gegeben: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, wovon wir die Summe durch den Buchstaben S andeuten wollen, also daß

$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512$

so wird dieses doppelt genommen geben:

$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024$.

Hiervon nehme man nun die obige Progression weg, so bleibt übrig:

$S = 1024 - 1 = 1023$; also ist die gesuchte Summe $= 1023$.

§. 509.

Wenn wir nun bey eben dieser Progression die Anzahl der Glieder unbestimmt annehmen und $= n$ setzen, so wird die Summe $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 \ldots . 2^{n-1}$ seyn. Dieses mit 2 multiplicirt, giebt $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 \ldots\ldots 2^n$, von diesen subtrahirt man jenes, so bekommt man $S = 2^n - 1$. Daher wird die gesuchte Summe gefunden, wenn man das letzte Glied 2^{n-1} mit dem Nenner 2 multiplicirt, um 2^n zu bekommen, und von diesem Product 1 subtrahirt.

§. 510.

Dieses wollen wir durch folgende Beispiele erläutern, indem wir für n nach und nach 1, 2, 3, 4

schreiben werden, als: $1=1$, $1+2=3$, $1+2+4=7$, $1+2+4+8=15$, $1+2+4+8+16=31$, $1+2+4+8+16+32=63$ u. s. f.

§. 511.

Hier pflegt auch die Frage vorzukommen: Es verkauft jemand sein Pferd nach den Hufnägeln, deren 32 sind; für den ersten Nagel fordert er 1 Pfennig, für den zweyten 2 Pfennige, für den dritten 4 Pfennige, für den vierten 8 Pfennige und immer für den folgenden zweymal so viel als für den vorigen. Nun ist die Frage, wie hoch dieses Pferd verkauft worden?

Hier muß also folgende geometrische Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, u. s. f. bis auf das 32ste Glied fortgesetzt und die Summe von allen gesucht werden. Da nun das letzte Gled $= 2^{31}$, so ist oben schon $2^{20} = 1048576$ gefunden worden, dieses multiplicirt man mit $2^{10} = 1024$, um $2^{30} = 1073741824$ zu haben. Dieses mit 2 multiplicirt, giebt das letzte Glied $2^{31} = 2147483648$; folglich wird die Summe dieser Zahl doppelt genommen weniger 1, das ist 4294967295 Pfennige, gleich seyn.

2) 4294967295 Pf.

6) 2147483647 (1.

oder 357913941 Gr. 3 Pf.

3) 357913941

8) 119304647

oder 14913080 Thlr. 21 Gr. 3 Pf.

Also wird der Preis des Pferdes 14913080 Thlr. 21 Gr. 3 Pf. seyn.

§. 512.

§. 512.

Es sey nun der Nenner = 3 und die geometrische Progression sey 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, und von diesen 7 Gliedern soll die Summe gefunden werden. Man setze dieselbe so lange = S, also daß:

$$S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729.$$

Man multiplicire mit 3, um zu haben:

$$3S = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187.$$

Hiervon subtrahire man die obige Reihe, so bekommt man $2S = 2187 - 1 = 2186$. Daher ist die doppelte Summe = 2186 und folglich die Summe 1093.

§. 513.

In eben dieser Progression sey die Anzahl der Glieder = n und die Summe = S, also daß $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots 3^{n-1}$, dieses mit 3 multiplicirt, giebt $3S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots 3^n$. Hiervon subtrahire man das obige, und weil sich alle Glieder der untern Reihe, außer dem letzten, gegen alle Glieder der obern, außer dem ersten, aufheben, so bekommt man $2S = 3^n - 1$ und also $S = \frac{3^n - 1}{2}$.

Also wird die Summe gefunden, wenn man das letzte Glied mit 3 multiplicirt, vom Product 1 subtrahirt und den Rest durch 2 theilt, wie aus folgenden Beispielen zu ersehen: $1 = 1$, $1 + 3 = \frac{3 \cdot 3 - 1}{2} = 4$, $1 + 3 + 9 = \frac{3 \cdot 9 - 1}{2} = 13$, $1 + 3 + 9 + 27 = \frac{3 \cdot 27 - 1}{2} = 40$, $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = \frac{3 \cdot 81 - 1}{2} = 121$.

§. 514.

Nun sey auf eine allgemeine Art das erste Glied = a, der Nenner = b, die Anzahl der Glieder = n und die Summe derselben = S, also daß

$$S = a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \ldots ab^{n-1}.$$

Dieses mit b multiplicirt, so bekommt man $bS = ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \ldots ab^n$. Hiervon subtrahire man das obige, so erhält man $(b - 1)$. $S = ab^n - a$, folglich bekommt man die gesuchte Summe $S = \frac{ab^n - a}{b - 1}$. Daher wird die Summe einer jeden geometrischen Progression gefunden, wenn man das letzte Glied mit dem Nenner der Progression multiplicirt, von dem Product das erste Glied subtrahirt und den Rest durch den Nenner weniger 1 dividirt.

§. 515.

Man habe eine geometrische Progression von 7 Gliedern; das erste = 3 und der Nenner = 2, so ist $a = 3$, $b = 2$ und $n = 7$, folglich das letzte Glied $3 \cdot 2^6$, das ist $3 \cdot 64 = 192$, und die Progression selbst

3, 6, 12, 24, 48, 96, 192.

also das letzte Glied 192 mit dem Nenner 2 multiplicirt, giebt 384, davon das erste Glied 3 subtrahirt, bleibt 381, dieser Rest durch $b - 1$, das ist, durch 1 dividirt, giebt 381, welches die Summe der Progression ist.

§. 516.

Es sey ferner eine geometrische Progression von sechs Gliedern gegeben, davon das erste 4 und der Nenner $\frac{3}{2}$, so daß die Progression ist:

$4, 6, 9, \frac{27}{2}, \frac{81}{4}, \frac{243}{8}$.

Dieses letzte Glied $\frac{243}{8}$ mit dem Nenner $\frac{3}{2}$ multiplicirt, giebt $\frac{729}{16}$, davon das erste Glied 4 subtrahirt, giebt $\frac{665}{16}$, endlich dieser Rest dividirt durch $b - 1 = \frac{1}{2}$, giebt $\frac{665}{8} = 83\frac{1}{8}$.

§. 517.

Wenn der Nenner kleiner ist als 1 und also die Glieder der Progression immer abnehmen, so kann

die Summe einer solchen Progression, die ohne Ende fortgeht, angegeben werden.

Es sey z. B. das erste Glied = 1, der Nenner = $\frac{1}{2}$, und die Summe = S, also daß

$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ u. s. f. ohne Ende.

Man multiplicire mit 2, so bekommt man:

$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ u. s. f. ohne Ende,

hiervon ziehe man das obige ab, so bleibt S = 2, welches die Summe der unendlichen Progression ist.

§. 518.

Es sey ferner das erste Glied = 1, der Nenner = $\frac{1}{3}$, und die Summe = S, also daß

$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ u. s. f. ohne Ende.

Man multiplicire alles mit 3, so hat man

$3S = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ u. s. f. ohne Ende.

Hiervon nehme man die obige Reihe weg, so bleibt 2S = 3, folglich ist die Summe = $1\frac{1}{2}$.

§. 519.

Es sey ferner das erste Glied = 2, der Nenner = $\frac{3}{4}$, die Summe = S, also daß $S = 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128}$ u. s. f. ohne Ende. Dieses multiplicire man mit $\frac{4}{3}$, so hat man $\frac{4}{3}S = \frac{8}{3} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \frac{81}{128}$ u. s. f. ohne Ende. Hiervon das obige subtrahirt, bleibt $\frac{1}{3}S = \frac{8}{3}$, also wird die Summe selbst gerade 8 seyn.

§. 520.

Wenn überhaupt das erste Glied = a und der Nenner der Progression = $\frac{b}{c}$, so daß dieser Bruch kleiner ist als 1 und folglich b kleiner ist als c, so kann die Summe dieser unendlichen Progression folgendergestalt gefunden werden. Man setzt

$S = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4}$ u. s. f. ohne Ende.

Hier

Hier multiplicirt man mit $\frac{b}{c}$, so bekommt man

$\frac{b}{c}S = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4}$ u. s. f. ohne Ende.

Dieses subtrahirt man von dem obigen, so bleibt

$\left(1 - \frac{b}{c}\right) S = a$, folglich ist $S = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}$.

Multiplicirt man nun oben und unten mit c, so bekommt man $S = \frac{ac}{c-b}$, daher ist die Summe dieser unendlichen geometrischen Progression $= \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}$ oder $\frac{ac}{c-b}$.

Diese Summe wird folglich gefunden, wenn man das erste Glied a dividirt durch 1 weniger dem Nenner; oder wenn man den Nenner von 1 subtrahirt, und durch den Rest das erste Glied dividirt.

§. 521.

Wenn in solchen Progressionen die Zeichen + und — mit einander abwechseln, so kann die Summe auf eben dieselbe Art gefunden werden. Denn es sey

$$S = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ u. s. f.}$$

Dieses multiplicire man mit $\frac{b}{c}$, so bekommt man:

$$\frac{b}{c}S = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4} \text{ u. s. f.}$$

Dieses addire man zu dem obigen, so erhält man $\left(1 + \frac{b}{c}\right) S = a$. Hieraus findet man die gesuchte Summe $S = \frac{a}{1 + \frac{b}{c}}$ oder $S = \frac{ac}{c+b}$.

§. 522.

Es sey z. B. das erste Glied $a = \frac{3}{5}$ und der Nenner der Progression $= \frac{2}{5}$, das ist $b = 2$ und $c = 5$, so wird von dieser Reihe $\frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} + \frac{24}{625}$ u. s. f. die Summe also gefunden: der Nenner von 1 subtrahirt, bleibt $\frac{3}{5}$, dadurch muß man das erste Glied $\frac{3}{5}$ dividiren, so bekommt man die Summe = 1.

Wenn aber die Zeichen + und — abwechseln und diese Reihe vorgelegt ist:

$$\frac{3}{5} - \frac{6}{25} + \frac{12}{125} - \frac{24}{625} \text{ u. s. f.}$$

so wird die Summe seyn:

$$\frac{a}{1+\frac{b}{c}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7}$$

§. 523.

Zur Uebung soll diese unendliche Progression vorgelegt seyn:

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} \text{ u. s. f.}$$

Hier ist das erste Glied $\frac{3}{10}$ und der Nenner $\frac{1}{10}$. Dieser von 1 subtrahirt, bleibt $\frac{9}{10}$. Hierdurch das erste Glied dividirt, giebt die Summe = $\frac{1}{3}$.

Nimmt man nur ein Glied $\frac{3}{10}$, so fehlt noch $\frac{1}{10}$.

Nimmt man zwey Glieder $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} = \frac{33}{100}$, so fehlt noch $\frac{1}{100}$ zu $\frac{1}{3}$ u. s. f.

§. 524.

Wenn diese unendliche Reihe gegeben ist:

$$9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} \text{ u. s. f.}$$

so ist das erste Glied 9, der Nenner $\frac{1}{10}$, also 1 weniger dem Nenner ist $\frac{9}{10}$. Hierdurch das erste Glied 9 dividirt, so wird die Summe = 10. Hier ist zu merken, daß diese Reihe durch einen Decimalbruch also vorgestellt wird 9, 9999999 u. s. f.

Zusatz.

Zusatz. Von §. 517 an sind hier Reihen summirt worden, die eine unendliche Anzahl von Glieder haben, deren jedes ein ächter Bruch ist. Ich werde am letzten Beyspiele zeigen, wie man das hier gelehrte eigentlich verstehen soll. Wenn ich das erste Glied 9 der Reihe weglasse, so muß $S = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} - - - = 0,999 - - - = 1$ seyn. Summiren wir von dieser Reihe nur n Glieder, so fehlt an der Summe 1 auch noch $\frac{1}{10^n}$; denn S ist $= \frac{9}{10} \cdot \frac{\frac{1}{10^n} - 1}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1 - 10^n}{10^n(1-10)} \cdot 10 = \frac{10^n - 1}{10^n} = 1 - \frac{1}{10^n}$, je größer also n ist, je weniger fehlt an Eins. Wenn man daher die Reihe so weit, als man will, fortsetzen darf, so läßt sich keine Größe angeben, um welche ihre Summe kleiner bliebe als 1 ist; denn 10^n kann größer als jede Zahl und daher $\frac{1}{10^n}$ kleiner als jede gegebene Zahl werden.

Der Ausdruck: die Reihe lasse sich ins Unendliche fortsetzen, ist so zu verstehen: jedes folgende Glied der Reihe ist der zehnte Theil seines nächstvorhergehenden Gliedes, jenes hat eine Größe, wenn dieses eine hatte. Man kömmt also nie auf ein Glied, wo die Reihe aufhörte, und dieses ist die Bedeutung jenes Ausdrucks.

Summe einer unendlichen Reihe von Brüchen heißt daher eine Größe, der diese Reihe, ins Unendliche fortgesetzt, so nahe kommen kann, als man will, dergestalt, daß sich kein Unterschied zwischen dieser Größe und der Summe der Reihe angeben läßt.

XII. Capitel.

Von den unendlichen Decimalbrüchen.

§. 525.

Wir haben oben gesehen, daß man sich bey den logarithmischen Rechnungen statt der gemeinen Brüche der Decimalbrüche bedient, welches auch bey an-

dern Rechnungen mit großem Vortheil geschehen kann. Es kommt also darauf an zu zeigen, wie ein gemeiner Bruch in einen Decimalbruch verwandelt werde, und wie man den Werth eines Decimalbruchs umgekehrt durch einen gemeinen Bruch ausdrücken soll.

§. 526.

Es sey auf eine allgemeine Art der gegebene Bruch $\frac{a}{b}$, welcher in einen Decimalbruch verwandelt soll. Da nun dieser Bruch den Quotienten ausdrückt, welcher entsteht, wenn man den Zähler a durch den Nenner b dividirt, so schreibe man statt a diese Form a, 0000000, welche offenbar nichts anders anzeigt als die Zahl a, weil keine 10tel, keine 100tel u. s. f. vorhanden sind. Diese Form theile man nun durch die Zahl b nach den gewöhnlichen Regeln der Division, wobey man nur in Acht zu nehmen hat, daß das Comma, welches die Decimalbrüche von den ganzen Zahlen absondert, an seinen gehörigen Ort gesetzt werde. Dieses wollen wir nun durch folgende Beispiele erläutern.

Es sey erstlich der gegebene Bruch $\frac{1}{2}$, so kommt die Decimaldivision wie folget zu stehen:

$$\frac{2)\ 1,\ 0000000}{0,\ 5000000} = \frac{1}{2}.$$

Hieraus sehen wir, daß $\frac{1}{2}$ so viel sey als 0, 5000000, oder als 0, 5, welches auch offenbar ist, indem dieser Decimalbruch $\frac{5}{10}$ anzeigt, welches eben so viel ist als $\frac{1}{2}$.

§. 527.

Es sey ferner der gegebene Bruch $\frac{1}{3}$, so hat man diesen Decimalbruch:

$$\frac{3)\ 1,\ 0000000}{0,\ 3333333}\ \text{u. s. f.} = \frac{1}{3}.$$

Hieraus sieht man, daß dieser Decimalbruch, dessen Werth $= \frac{1}{3}$ ist, nirgend abgebrochen werden kann,

kann, sondern ins Unendliche durch lauter 3 fortläuft. Also machen alle diese Brüche $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000}$ u. s. f. ohne Ende zusammen genommen gerade so viel als $\frac{1}{3}$, wie wir schon oben gezeigt haben.

Für $\frac{2}{3}$ findet man folgenden Decimalbruch, der auch ins Unendliche fortläuft:

$$\frac{3)\ 2,\ 0000000}{0,\ 6666666} \text{ u. s. f.} = \frac{2}{3},$$

welches auch aus dem vorigen erwiesen ist, weil dieser Bruch zweymal so groß ist, als der vorige.

§. 528.

Es sey der gegebene Bruch $\frac{1}{4}$, so hat man diese Decimaldivision:

$$\frac{4)\ 1,\ 0000000}{0,\ 2500000} = \frac{1}{4},$$

also ist $\frac{1}{4}$ so viel als 0, 2500000, oder als 0, 25, welches beweiset, daß $\frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ ist.

Eben so bekommt man für $\frac{3}{4}$ diesen Decimalbruch:

$$\frac{4)\ 3,\ 0000000}{0,\ 7500000} = \frac{3}{4},$$

also ist $\frac{3}{4} = 0,\ 75$, das ist $\frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100}$, welcher Bruch, durch 25 abgekürzt, $\frac{3}{4}$ giebt.

Wollte man $\frac{5}{4}$ in einen Decimalbruch verwandeln, so hätte man

$$\frac{4)\ 5,\ 0000000}{1,\ 2500000} = \frac{5}{4},$$

dieses ist aber $1 + \frac{25}{100}$, das ist $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

§. 529.

Auf solche Art wird $\frac{1}{5} = 0,\ 2$: und $\frac{2}{5} = 0,\ 4$; ferner $\frac{3}{5} = 0,\ 6$; $\frac{4}{5} = 0,\ 8$ und $\frac{5}{5} = 1$; weiter $\frac{6}{5} = 1,\ 2$ u. s. f.

Wenn der Nenner 6 ist, so finden wir $\frac{1}{6} = 0,\ 1666666$ u. s. f., welches so viel ist als $0,\ 666666 - 0,\ 5$. Nun aber ist $0,\ 666666 = \frac{2}{3}$ und $0,\ 5 = \frac{1}{2}$, folglich ist $0,\ 1666666 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Ferner findet man $\frac{2}{6} = 0,3333333$ u. s. f. $= \frac{1}{3}$; hingegen $\frac{3}{6}$ wird $0,5000000 = \frac{1}{2}$. Weiter wird $\frac{5}{6} = 0,833333 = 0,3333333 + 0,5$, das ist $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

§. 530.

Wenn der Nenner 7 ist, so werden die Decimalbrüche mehr verwirrt; also für $\frac{1}{7}$ findet man 0,142857 u. s. f., wobey zu merken, daß immer diese sechs Zahlen 142857 wieder kommen. Um nun zu zeigen, daß dieser Decimalbruch gerade $\frac{1}{7}$ ausmache, so verwandle man denselben in eine geometrische Progression, wovon das erste Glied $= \frac{142857}{1000000}$, der Nenner aber $= \frac{1}{1000000}$, also wird die Summe $= \frac{\frac{142857}{1000000}}{1 - \frac{1}{1000000}}$. Man multiplicire oben und unten mit 1000000, so wird diese Summe $= \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$.

§. 531.

Daß der gefundene Decimalbruch gerade $\frac{1}{7}$ betrage, kann noch leichter folgendergestalt gezeigt werden. Man setze für den Werth desselben den Buchstaben S, also daß

$S = 0,142857142857142857$ u. s. f.

so wird $10\,S = 1,42857142857142857$ u. s. f.

$100\,S = 14,2857142857142857$ u. s. f.

$1000\,S = 142,857142857142857$ u. s. f.

$10000\,S = 1428,57142857142857$ u. s. f.

$100000\,S = 14285,7142857142857$ u. s. f.

$1000000\,S = 142857,142857142857$ u. s. f.

Subtrahire $S = 0,142857142857$ u. s. f.

$999999\,S = 142857$,

Nun theile man durch 999999, so bekommt man $S = \frac{142857}{999999}$ und dieses ist der Werth des obigen Decimalbruchs $\frac{1}{7}$.

§. 532.

§. 532.

Eben so verwandelt man $\frac{2}{7}$ in einen Decimalbruch 0,28571428 u. s. f. Dieses leitet uns darauf, wie man den Werth des vorigen Decimalbruchs, den wir S gesetzt haben, leichter finden kann, weil dieser Bruch gerade zweymal so groß ist als der vorige und also = 2 S. Da wir nun gehabt haben

$$100S = 14,2857142857\text{ u. s. f.}$$

hiervon 2 S weggenommen $2S = 0,2857142857\text{ u. s. f.}$

bleiben $98\,S = 14$,

daher wird $S = \frac{14}{98} = \frac{1}{7}$.

Ferner wird $\frac{3}{7} = 0,428571428 57$ u. s. f.; dieses ist also nach dem obigen Satz = 3 S. Wir haben aber gefunden

$$10\,S = 1,4285714285 7\text{ u. s. f.}$$

Subtrahire $3\,S = 0,4285714285 7$ u. s. f.

so wird $7\,S = 1$, folglich $S = \frac{1}{7}$.

§. 533.

Wenn also der Nenner des gegebenen Bruchs 7 ist, so läuft der Decimalbruch ins Unendliche, und werden darin 6 Zahlen immer wiederholt, wovon der Grund leicht einzusehen ist, weil bey fortgesetzter Division endlich einmal so viel übrig bleiben muß, als man anfänglich gehabt. Es können aber nicht mehr verschiedene Zahlen übrig bleiben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, also müssen von der sechsten Division an wieder eben die Zahlen herauskommen als vom Anfang. Wenn aber der Nenner so beschaffen ist, daß die Division am Ende aufgeht, so fällt dieses weg.

§. 534.

Es sey der Nenner des Bruchs 8, so werden folgende Decimalbrüche gefunden:

 $\frac{1}{8} = 0,$

$\frac{1}{8} = 0,125 : \frac{2}{8} = 0,250 : \frac{3}{8} = 0,375 : \frac{4}{8} = 0,500 :$
$\frac{5}{8} = 0,625 : \frac{6}{8} = 0,750 : \frac{7}{8} = 0,875$ u. s. f.

§. 535.

Ist der Nenner 9, so findet man folgende Decimalbrüche: $\frac{1}{9} = 0,111$ u. s. f. $\frac{2}{9} = 0,222$ u. s. f. $\frac{3}{9} = 0,333$ u. s. f. Ist aber der Nenner 10, so bekommt man folgende Brüche: $\frac{1}{10} = 0,100$; $\frac{2}{10} = 0,2$; $\frac{3}{10} = 0,3$, wie aus der Natur der Sache erhellet. Eben so wird $\frac{1}{100} = 0,01$; $\frac{37}{100} = 0,37$; ferner $\frac{256}{1000} = 0,256$; weiter $\frac{24}{10000} = 0,0024$, welches für sich klar ist.

§. 536.

Es sey der Nenner des Bruchs 11, so findet man diesen Decimalbruch $\frac{1}{11} = 0,0909090$ u. s. f. Wäre nun dieser Bruch gegeben und man wollte seinen Werth finden, so setze man denselben = S. Es wird also S = 0,0909090; und 10 S = 0,909090; weiter 100 S = 9,09090. Hiervon S subtrahirt, so wird 99 S = 9 und daher $S = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$. Ferner wird $\frac{2}{11} = 0,181818$; $\frac{3}{11} = 0,272727$; $\frac{6}{11} = 0,545454$.

§. 537.

Hier sind nun diejenigen Decimalbrüche sehr merkwürdig, wo einige Zahlen immer wiederholt werden und die solchergestalt ins Unendliche fortgehen. Wie man von solchen Brüchen den Werth leicht finden könne, soll sogleich gezeigt werden.

Es werde erstlich nur eine Zahl wiederholt, welche = a sey, so haben wir S = 0, aaaaaaa. Daher wird

$$10\,S = a,\ aaaaaaa.$$

Subtrahire $S = 0,\ aaaaaaa$

so wird $9\,S = a$, folglich $S = \frac{a}{9}$.

Werden

Werden immer zwey Zahlen wiederholt, als ab, so hat man S = 0, ab ab ab a. Daher wird 100 S = ab, ab ab ab, hievon S subtrahirt, bleibt 99 S = ab; also $S = \frac{ab}{99}$.

Werden drey Zahlen, als abc, immer wiederholt, so hat man S = 0, abc abc abc; folglich 1000 S = abc, abc abc. Hiervon das obige subtrahirt, bleibt 999 S = abc; also $S = \frac{abc}{999}$ u. s. f.

Anmerk. Diese Eigenschaft gewisser Decimalbrüche, nach welcher die Decimalzahlen wiederkehren, bieten Materie zu sehr vielen interessanten Untersuchungen dar. Man findet einen sehr lesenswerthen Aufsatz darüber von Hrn. Prof. Joh. Bernoulli in den Mémoires der Akademie zu Berlin vom Jahr 1771. Hier erlaubt der Platz nur folgendes beyzubringen.

Es sey $\frac{N}{D}$ irgend ein ächter Bruch, welcher nicht in kleinern Zahlen ausgedrückt werden kann; man fragt, bis zu wie viel Ziffern man ihn in Decimalen ausdrücken muß, ehe dieselben Ziffern wiederkommen? Ich nehme an, daß 10 N größer als D ist, wäre dieses nicht, aber daß 100 N oder 1000 N wohl größer wären als D, so muß man zuerst sehen, ob $\frac{10N}{D}$ oder $\frac{100N}{D}$ u. s. f. sich auf kleinere Zahlen reduciren läßt, oder in einem Bruche $\frac{N^{I}}{D^{I}}$.

Dieses vorausgesetzt, so behaupte ich, daß dieselbe Periode nur alsdann erst wiederkommt, wenn in der fortgesetzten Division, die man macht, dasselbe Resultat N wieder erscheint. Wir wollen annehmen, daß wir bis dahin s Nullen angehängt haben, und daß Q den Quotienten in ganzen Zahlen bedeutet, indem wir von dem Comma abstrahiren, so haben wir $\frac{N.10^s}{D} = Q + \frac{N}{D}$; also $Q = \frac{N}{D} \cdot (10^s - 1)$. Da aber Q eine ganze Zahl seyn muß, so wird erfordert für s die kleinste ganze Zahl zu bestimmen, so daß $\frac{N}{D} \cdot (10^s - 1)$, oder nur $\frac{10^s - 1}{D}$ eine ganze Zahl sey.

Man muß hierbey verschiedene Fälle unterscheiden: der erste ist dieser, wo D ein Maaß von 10, oder von 100, oder

oder von 1000 u. s. f. ist; und es ist klar, daß in diesem Fall keine periodischen Decimalbrüche statt finden können. Wir nehmen für den zweyten Fall den, wo D eine ungerade Zahl ist, und welche kein Factor einer Potenz von 10 ist; in diesem Fall kann der Werth von s bis D — 1 seyn, aber öfters ist er weniger. Ein dritter Fall ist endlich der, wo D gerade ist, und wo also, ohne ein Factor von einer Potenz von 10 zu seyn, doch ein gemeinschaftlicher Divisor mit einer dieser Potenzen da ist. Dieser gemeinschaftliche Divisor kann nur eine Zahl von folgender Form 2^c seyn. Wenn also $\frac{D}{2^c} = d$, so behaupte ich, daß die Perioden dieselben als für den Bruch $\frac{N}{d}$ seyn werden, aber daß sie nicht eher als bey der durch c bezeichneten Ziffer anfangen. Also ist dieser Fall mit dem zweyten einerley, und es ist übrigens sichtbar, daß gerade dieses hier das Wesentliche dieser Theorie ausmacht.

§. 538.

So oft also ein solcher Decimalbruch vorkommt, so ist es leicht seinen Werth anzuzeigen. Also wenn dieser gegeben wäre 0,296296, so wird sein Werth $= \frac{296}{999}$ seyn. Dieser Bruch durch 37 abgekürzt, wird $= \frac{8}{27}$.

Hieraus muß nun wieder der obige Decimalbruch entstehen; um dieses leichter zu zeigen, weil 27 = 3 . 9, so theile man 8 erstlich durch 9, und den Quotienten ferner durch 3, wie folget:

9) 8, 0000000
3) 0, 8888888
0, 2962962 u. s. f.

Welches der gegebene Decimalbruch ist.

§. 539.

Um noch ein Beispiel zu geben, so verwandle man diesen Bruch $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.}$ in einem Decimalbruch auf folgende Art:

2) 1,

2) 1, 0000000000000

3) 0, 5000000000000

4) 0, 1666666666666

5) 0, 0416666666666

6) 0, 0083333333333

7) 0, 0013888888888

8) 0, 0001984126984

9) 0, 0000248015873

10) 0, 0000027557319

0, 0000002755731

XIII. Capitel.

Von der Intressenrechnung *).

§. 540.

Die Intressen oder Zinsen von einem Capital pflegen durch Procente ausgedrückt zu werden, indem man sagt, wie viel von 100 jährlich bezahlt werden. Gewöhnlich wird das Geld zu 5 p. C. ausgelegt, also daß

*) Die Theorie der Intressenrechnung dankt ihre ersten Fortschritte dem großen Leibnitz, welcher die Hauptelemente in den actis Eruditorum, Leipzig 1683, gab. Sie hat nachher Stoff zu verschiedenen einzelnen sehr interessanten Dissertationen gegeben. Diejenigen Mathematiker, welche über politische Arithmetik gearbeitet, haben solche am meisten erweitert. Wir nennen unter Deutschen mit Recht hier vorzüglich Florencourt, Michelsen und Teten, die hierüber vortreffliche jede in besonderer Rücksicht schätzbare Werke geliefert haben, und dürfen sie kühn den Ausländern entgegen stellen, die vorher, besonders die Engländer, uns beyweitem hierin übertrafen.

daß von 100 Rthlr. jährlich 5 Rthlr. Intressen gezahlt werden. Hieraus ist es nun leicht, den Zins von einem jeden Capital zu berechnen, indem man nach der Regeldetri sagt:

100 geben 5, was giebt das gegebene Capital? Es sey z. B. das Capital 860 Rthlr., so findet man den jährlichen Zins

100 : 5 = 860 zu . . . Antwort 43 Rthlr.

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 100)\ 4300 \\ \hline 43 \end{array}$$

§. 541.

Bey Berechnung dieses einfachen Intresse wollen wir uns nicht aufhalten, sondern die Intressen auf Intressen betrachten, da jährlich die Zinsen wieder zum Capital geschlagen und dadurch das Capital vermehret wird, wobey dann gefragt wird: wie hoch ein gegebenes Capital nach Verfließung einiger Jahre anwachse? Da nun das Capital jährlich größer wird, indem zu 5 Proc. 100 Rthlr. nach einem Jahr zu 105 anwachsen, so kann man daraus finden, wie groß ein jedes Capital nach Verfließung eines Jahres werden müsse?

Es sey das Capital = a, so wird solches nach einem Jahre gefunden, wenn man sagt: 100 geben 105, was giebt a? Antwort $\frac{105a}{100} = \frac{21a}{20}$, welches man auch also schreiben kann $\frac{21}{20}.a$ oder $a + \frac{1}{20}.a$.

§. 542.

Wenn also zu dem gegenwärtigen Capital sein 20ster Theil addirt wird, so bekommt man das Capital für das folgende Jahr. Wenn man nun zu diesem wieder seinen 20sten Theil addirt, so findet

man

man das Capital für das zweyte Jahr; und zu diesem wieder sein 20ster Theil addirt, giebt das Capital für das dritte Jahr u. s. f. Hieraus ist leicht zu sehen, wie das Capital jährlich anwächst, und kann diese Rechnung so weit fortgesetzt werden, als man will.

§. 543.

Es sey das Capital jetzt 1000 Rthlr., welches zu 5 pro Cent angelegt ist und die Zinsen davon jährlich wieder zum Capital geschlagen werden. Weil nun die besagte Rechnung bald auf Brüche führen wird, so wollen wir solche in Decimalbrüchen ausdrücken, nicht weiter aber als bis auf 1000ste Theile eines Rthlr. gehen, weil kleinere Theilchen hier in keine Betrachtung kommen.

Gegenwärtiges Capital 1000 Rthlr. wird

nach 1 Jahr . .	1050 Rthlr.
	52, 5
nach 2 Jahren . .	1102, 5
	55, 125
nach 3 Jahren . .	1157, 625
	57, 881
nach 4 Jahren . .	1215, 506
	60, 775
nach 5 Jahren . .	1276, 281 u. s. f.

§. 544.

Solchergestalt kann man auf so viele Jahre fortgehen als man will; wenn aber die Anzahl der Jahre sehr groß ist, so wird diese Rechnung sehr weitläufig und mühsam. Es läßt sich diese aber folgendergestalt abkürzen:

Es sey das gegenwärtige Capital = a, und da ein Capital von 20 Rthlr. nach einem Jahre 21 Rthlr. beträgt, so wird das Capital a nach einem Jahre auf $\frac{21}{20}$. a anwachsen. Ferner im folgenden Jahre auf $\frac{21^2}{20^2} \cdot a = (\frac{21}{20})^2 . a$. Dieses ist nun das Capital nach zweyen Jahren, welches in einem Jahre wieder auf $(\frac{21}{20})^3 . a$ anwächst, welches das Capital nach drey Jahren seyn wird; nach vier Jahren wird nun dasselbe $(\frac{21}{20})^4 . a$; nach fünf Jahren $(\frac{21}{20})^5 . a$; 100 Jahren $(\frac{21}{20})^{100} . a$, und allgemein nach n Jahren wird dasselbe $(\frac{21}{20})^n . a$ seyn; woraus man nach einer jeden beliebigen Zahl von Jahren die Größe des Capitals finden kann.

§. 545.

Der hier vorkommende Bruch $\frac{21}{20}$ gründet sich darauf, daß das Intresse zu 5 pro Cent gerechnet wird, und $\frac{21}{20}$ so viel ist als $\frac{105}{100}$. Sollte nun das Intresse zu 6 pro Cent gerechnet werden, so würde das Capital a nach einem Jahre auf $\frac{106}{100} . a$ anwachsen; nach zwey Jahren auf $(\frac{106}{100})^2 . a$; und nach n Jahren auf $(\frac{106}{100})^n . a$.

Sollte aber das Intresse nur 4 pro Cent betragen, so würde das Capital a nach n Jahren auf $(\frac{104}{100})^n . a$ anwachsen.

§. 546.

Wenn nun sowohl das Capital a, als die Anzahl der Jahre gegeben ist, so kann man diese Formen leicht durch die Logarithmen auflösen, denn man darf nur den Logarithmus von dieser Formel suchen, welche zu 5 pro Cent $(\frac{21}{20})^n . a$ ist. Da nun dieselbe ein Product von $(\frac{21}{20})^n$ und a ist, so ist ihr Logarithmus $= \log. (\frac{21}{20})^n + \log. a$. Da weiter $(\frac{21}{20})^n$ eine Potenz ist, so ist $\log. (\frac{21}{20})^n = n \log. \frac{21}{20}$. Daher ist der Logarithmus von dem gesuchten Capital = n.

log. $\frac{21}{20}$ + log. a. Es ist aber der Logarithmus des Bruchs $\frac{21}{20}$ = log. 21 — log. 20.

§. 547.

Es sey nun das Capital = 1000 Rthlr., und man fragt, wie groß dasselbe nach 100 Jahren zu 5 pro Cent seyn werde?

Hier ist also n = 100. Der Logarithmus von diesem gesuchten Capital wird nun = 100 log. $\frac{21}{20}$ + log. 1000 seyn, welches folgendergestalt berechnet wird:

	log. 21 = 1, 3222193
subtr.	log. 20 = 1, 3010300
	log. $\frac{21}{20}$ = 0, 0211893
multipl. mit 100	
	100 log. $\frac{21}{20}$ = 2, 1189300
addirt	log. 1000 = 3, 0000000
	5, 1189300

Dieses ist der Logarithmus des gesuchten Capitals und die Zahl desselben wird daher aus 6 Figuren bestehen und also 131501 Rthlr. seyn.

§. 548.

Ein Capital von 3452 Rthlr. zu 6 pro Cent, wie groß wird dasselbe nach 64 Jahren?

Hier ist also a = 3452 und n = 64. Also der Logarithmus des gesuchten Capitals = 64 log. $\frac{53}{50}$ + log. 3452, welches also berechnet wird:

	log. 53 = 1, 7242759
subt.	log. 50 = 1, 6989700
	log. $\frac{53}{50}$ = 0, 0253059
mult. mit 64;	64 log. $\frac{53}{50}$ = 1, 6195776
	log. 3452 = 3, 5380708
	5, 1576484

Also das gesuchte Capital = 143763 Rthlr.

§. 549.

Wenn die Anzahl der Jahre sehr groß ist, so könnte, weil damit der Logarithmus eines Bruchs multiplicirt werden muß, die Logarithmen in den gewöhnlichen Tabellen aber nur auf 7 Figuren berechnet worden, ein merklicher Fehler entstehen. Daher muß der Logarithmus des Bruchs auf mehrere Figuren genommen werden, wie aus folgendem Beispiele zu ersehen: ein Capital von einem Rthlr. zu 5 p. C. bleibt 500 Jahr lang stehen, da inzwischen die jährlichen Zinsen immer dazu geschlagen worden. Nun fragt sich, wie groß dieses Capital nach 500 Jahren seyn werde?

Hier ist also $a = 1$ und $n = 500$, also der Logarithmus des gesuchten Capitals $= 500 \log. \frac{21}{20} + \log. 1$, woraus diese Rechnung entstehet:

$$\log. 21 = 1,\ 3222192947339$$
subtrahirt $$\log. 20 = 1,\ 3010299956639$$

$$\log. \tfrac{21}{20} = 0,\ 0211892990699$$
mult. mit 500, giebt $10,\ 5946495349500$

Dieses ist nun der Logarithmus des gesuchten Capitals, welches daher selbst $= 39323200000$ Rthlr. seyn wird.

§. 550.

Wenn man aber jährlich zu dem Capital nicht nur die Intressen schlagen, sondern noch jährlich eine neue Summe $= b$ dazu legen wollte, so wird das gegenwärtige Capital alle Jahr anwachsen, wie folget.

Gegenwärtig hat man a;

nach 1 Jahr $\frac{21}{20}a + b$

nach 2 Jahr $(\frac{21}{20})^2 a + \frac{21}{20}b + b$

nach 3 Jahr $(\frac{21}{20})^3 a + (\frac{21}{20})^2 b + \frac{21}{20}b + b$

nach 4 Jahr $(\frac{21}{20})^4 a + (\frac{21}{20})^3 b + (\frac{21}{20})^2 b + \frac{21}{20}b + b$

nach n Jahr $(\frac{21}{20})^n a + (\frac{21}{20})^{n-1} b + (\frac{21}{20})^{n-2} b + \ldots$
$\ldots + \frac{21}{20}b + b$

Dieses

Dieſes Capital beſteht aus zwey Theilen, davon der erſte = $(\frac{21}{20})^n a$, der andere aber aus dieſer Reihe rückwärts geſchrieben $b + (\frac{21}{20}) b + (\frac{21}{20})^2 b + (\frac{21}{20})^3 b + \ldots (\frac{21}{20})^{n-1} b$ beſteht, welches eine geometriſche Progreſſion iſt, deren Nenner = $\frac{21}{20}$; die Summe wird nun alſo gefunden:

Man multiplicirt das letzte Glied $(\frac{21}{20})^{n-1} b$ mit dem Nenner $\frac{21}{20}$, ſo bekommt man $(\frac{21}{20})^n b$, davon ſubtrahirt man das erſte Glied b, ſo bleibt $(\frac{21}{20})^n b - b$. Dieſes muß durch 1 weniger als der Nenner iſt, dividirt werden, das iſt durch $\frac{1}{20}$; daher wird die Summe der obigen Progreſſion $= 20 (\frac{21}{20})^n b - 20 b$; folglich wird das geſuchte Capital ſeyn:

$$(\tfrac{21}{20})^n a + 20 . (\tfrac{21}{20})^n b - 20 b = (\tfrac{21}{20})^n . (a + 20 b) - 20 b.$$

§. 551.

Um nun dieſes auszurechnen, ſo muß man das erſte Glied $(\frac{21}{20})^n (a + 20 b)$ beſonders betrachten und berechnen, welches geſchieht, wenn man den Logarithmus deſſelben ſucht, welcher $n \log. \frac{21}{20} + \log. (a + 20 b)$ iſt. Zu dieſem ſucht man in den Tabellen die gehörige Zahl, ſo hat man das erſte Glied, davon ſubtrahirt man 20b, ſo bekommt man das geſuchte Capital.

§. 552.

Frage. Einer hat ein Capital von 1000 Rthlr. zu 5 pr. C. ausſtehen, wozu er jährlich außer den Zinſen noch 100 Rthlr. hinzulegt, wie groß wird dieſes Capital nach 25 Jahren ſeyn?

Hier iſt alſo $a = 1000$, $b = 100$, $n = 25$; daher wird die Rechnung ſtehen, wie folget:

$$\log. \tfrac{21}{20} = 0,\ 021189299$$

multiplic. mit 25, giebt

$$25 \log. \tfrac{21}{20} = 0,\ 5297324750$$

$$0,\ 5297324750$$
$$\log.(a+20b) = 3,\ 4771213135$$
$$4,\ 0068537885$$

Also ist der erste Theil 10159, 1 Rthlr, davon 20b = 2000 subtrahirt, so ist das Capital nach 25 Jahren werth 8159, 1 Rthlr.

§. 553.

Da nun das Capital immer größer wird und nach 25 Jahren auf $8159\frac{1}{10}$ Rthlr. angewachsen, so kann man weiter fragen, nach wie viel Jahren dasselbe bis auf 1000000 Rthlr. anwachsen werde?

Es sey n diese Anzahl von Jahren, und weil a = 1000, b = 100, so wird nach n Jahren das Capital seyn: $(\frac{21}{20})^n(3000) - 2000$, dieses muß nun 1000000 Rthlr. seyn, woraus diese Gleichung entspringt:

$$3000\,(\tfrac{21}{20})^n - 2000 = 1000000.$$

Man addire beyderseits 2000, so bekommt man

$$3000\,(\tfrac{21}{20})^n = 1002000.$$

Man dividire beyderseits durch 3000, so hat man $(\frac{21}{20})^n = 334$. Hiervon nehme man die Logarithmen, so hat man $n.\log.\frac{21}{20} = \log.334$. Hier dividirt man durch $\log.\frac{21}{20}$, so kommt $n = \frac{\log.334}{\log.\frac{21}{20}}$. Nun aber ist $\log.334 = 2,5237465$, $\log.\frac{21}{20} = 0,0211893$; daher wird $n = \frac{2,5237465}{0,0211893}$. Man multiplicire oben und unten mit 10000000, so kommt $n = \frac{25237465}{211893}$, das ist 119 Jahr 1 Monath 7 Tage, und nach so langer Zeit wird das Capital auf 1000000 Rthlr. anwachsen.

§. 554.

Wenn aber, statt daß alle Jahr etwas zum Capital gelegt wird, etwas davon weggenommen wird, so

welches man auf seinen Unterhalt verwendet, und diese Summe = b gesetzt wird, so wird das zu 5 p. C. angelegte Capital a folgendergestalt fortgehen:

Gegenwärtig ist es a:

nach 1 Jahr $\frac{21}{20}a - b$

nach 2 Jahren $(\frac{21}{20})^2 a - \frac{21}{20}b - b$

nach 3 Jahren $(\frac{21}{20})^3 a - (\frac{21}{20})^2 b - \frac{21}{20}b - b$

nach n Jahren $(\frac{21}{20})^n a - (\frac{21}{20})^{n-1} b - (\frac{21}{20})^{n-2} b \ldots$

$\ldots - (\frac{21}{20}) b - b.$

§. 555.

Es wird also dasselbe in zwey Stücken vorgelegt, das erste ist $(\frac{21}{20})^n a$; davon wird subtrahirt diese geometrische Progression rückwärts geschrieben $b + \frac{21}{20} b + (\frac{21}{20})^2 b + \ldots (\frac{21}{20})^{n-1}$. Hiervon ist oben die Summe gefunden worden $= 20\,(\frac{21}{20})^n b - 20b$, welche von dem ersten $(\frac{21}{20})^n a$ subtrahirt, das nach n Jahren gesuchte Capital giebt $(\frac{21}{20})^n (a - 20b) + 20b$.

§. 556.

Diese Formel hätte sogleich aus der vorigen geschlossen werden können. Denn da vorher jährlich b addirt wurde, so wird nun jährlich b subtrahirt. Also darf man in der vorhergehenden Formel anstatt $+ b$ nur $- b$ schreiben. Hier ist nun besonders zu merken, daß wenn 20b größer ist als a, so wird das erste Glied negativ und also das Capital immer kleiner; welches für sich offenbar ist, denn wenn vom Capital jährlich mehr weggenommen wird, als der Zins beträgt, so muß dasselbe alle Jahre kleiner werden und endlich gar verschwinden, welches wir mit einem Beispiele erläutern wollen.

§. 557.

Einer hat ein Capital von 100000 Rthlr. zu 5 pr. C. ausstehen, braucht alle Jahre zu seinem Unterhalt

terhalt 6000 Rthlr., welches mehr ist als die Intressen von 100000 Rthlr., welche nur 5000 Rthlr. betragen, daher das Capital immer kleiner wird. Nun ist die Frage, nach wie viel Jahren dasselbe gänzlich verschwinden werde?

Für diese Anzahl Jahre setze man n, und da a = 100000 Rthlr. und b = 6000, so wird nach n Jahren das Capital seyn $= -20000\,(\frac{21}{20})^n + 120000$ oder $120000 - 20000\,(\frac{21}{20})^n$. Also verschwindet das Capital, wenn $20000\,(\frac{21}{20})^n$ auf 120000 anwächst, oder wenn $20000\,(\frac{21}{20})^n = 120000$. Man dividire durch 20000, so kommt $(\frac{21}{20})^n = 6$. Man nehme die Logarithmen, so kommt $n \log. \frac{21}{20} = \log. 6$. Man dividire durch $\log. \frac{21}{20}$, so findet man $n = \frac{\log. 6}{\log. \frac{21}{20}}$ $= \frac{0,7781513}{0,0211893}$, oder $n = \frac{7781513}{211893}$, folglich wird n = 36 Jahr 8 Monath 22 Tage; und nach so vieler Zeit wird das Capital verschwinden.

§. 558.

Hier ist noch nöthig zu zeigen, wie nach diesem Grunde die Intressen auch für eine kleinere Zeit als ganze Jahre berechnet werden können. Hierzu dient nun die oben gefundene Formel, daß ein Capital zu 5 pr. C. nach n Jahren auf $(\frac{21}{20})^n a$ anwächst; ist nun die Zeit kleiner als ein Jahr, so wird der Exponent n ein Bruch und die Rechnung kann wie vorher durch Logarithmen gemacht werden. Sollte das Capital nach einem Tage gesucht werden, so muß man $n = \frac{1}{365}$ setzen; will man es nach zwey Tagen wissen, so wird $n = \frac{2}{365}$ u. s. f.

§. 559.

Es sey das Capital a = 100000 Rthlr. zu 5 p. C. wie groß wird solches nach 8 Tagen seyn?

Hier ist $a = 100000$ und $n = \frac{8}{365}$; folglich wird das Capital seyn $(\frac{21}{20})^{\frac{8}{365}}\ 100000$. Hiervon ist der Logarithmus $= \log. (\frac{21}{20})^{\frac{8}{365}} + \log. 100000 = \frac{8}{365} \log. \frac{21}{20} + \log. 100000$. Nun aber ist $\log. \frac{21}{20} = 0,0211892$.

dieser mit $\frac{8}{365}$ multiplicirt, giebt 0, 0004644,
hierzu ad. log. 100000, welcher ist 5, 0000000

5, 0004644

so erhält man den Logarithmus von dem Capital = 5, 0004644. Folglich ist das Capital selbst 100107 Rthlr., so daß in den ersten 8 Tagen das Intresse schon 107 Rthlr. beträgt.

§. 560.

Hierher gehören noch andere Fragen, welche darauf gehen, wenn eine Summe Geldes erst nach einigen Jahren verfällt, wie viel dieselbe jetzt werth sey. Hier ist zu betrachten, daß, da 20 Rthlr. über ein Jahr 21 Rthlr. austragen, wieder 21 Rthlr., die nach einem Jahr zahlbar sind, jetzt nur 20 Rthlr. werth sind. Wenn also das nach einem Jahr verfallene Capital a gesetzt wird, so ist dessen Werth $\frac{20}{21} a$. Um also zu finden, wie viel das Capital a, das zu einer gewissen Zeit verfällt, ein Jahr früher werth ist, so muß man dasselbe multipliciren mit $\frac{20}{21}$; zwey Jahr früher wird desselben Werth seyn $(\frac{20}{21})^2 a$; drey Jahr früher ist dasselbe $(\frac{20}{21})^3 a$ und überhaupt n Jahre früher ist der Werth desselben $(\frac{20}{21})^n a$.

§. 561.

Einer genießt auf 5 Jahre lang eine jährliche Rente von 100 Rthlr., dieselbe wollte er nun jetzt für baares Geld zu 5 pr. C. verkaufen, wie viel wird er dafür bekommen?

für

Bayerische Staatsbibliothek München

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.

für die 100 Rthlr., welche verfallen,	
nach 1 Jahr bekommt er	95, 239
nach 2 Jahren . .	90, 704
nach 3 Jahren . .	86, 385
nach 4 Jahren . .	82, 272
nach 5 Jahren . .	78, 355
Summe aller 5 Jahre . .	432, 955

Also kann er für diese Rente nicht mehr fordern, als 432,955 Rthlr. oder 432 Rthlr. 22 Gr. 11 Pf.

§. 562.

Sollte aber eine Rente viel mehr Jahre lang dauern, so würde die Rechnung auf diese Art sehr mühsam, sie kann aber folgendergestalt sehr erleichtert werden:

Es sey die jährliche Rente = a, welche jetzt schon anfängt und n Jahre lang dauert, so wird dieselbe jetzt werth seyn:

$$a + \tfrac{20}{21}a + (\tfrac{20}{21})^2 a + (\tfrac{20}{21})^3 a + (\tfrac{20}{21})^4 a + \ldots (\tfrac{20}{21})^n a.$$

Dieses ist nun eine geometrische Progression, deren Summe gefunden werden muß. Man multiplicirt also das letzte Glied mit dem Nenner, so hat man $(\frac{20}{21})^{n+1}a$; davon das erste Glied subtrahirt, bleibt $(\frac{20}{21})^{n+1}a - a$; dieses muß mit dem Nenner weniger eins, das ist mit $-\frac{1}{21}$ dividirt, oder welches gleichviel, mit -21 multiplicirt werden; daher wird die gesuchte Summe seyn $= -21\,(\frac{20}{21})^{n+1}a + 21a$, das ist $21a - 21\,(\frac{20}{21})^{n+1}a$, wovon das letzte Glied, welches subtrahirt werden soll, leicht durch Logarithmen berechnet werden kann.

Ende des ersten Theils

und des dritten Abschnits von den Verhältnissen und Proportionen.

Bayerische Staatsbibliothek München

$$s = a + ae + ae^2 + a \ldots + \ldots ae^n$$

$$se = ae + a \ldots ae^n + ae^{n+1}$$

$$s(e-1) = a(e^{n+1} + 1)$$

$$s = \frac{a(e^{n+1} + 1)}{e-1}$$

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Euler, Leonhard

Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra

Bd.: 1

Berlin (1796)

Math.p. 131 w-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10137651-6
VD18 90239563